ММ268

**Конкурсная задача ММ268** (9 баллов)

Решения принимаются до 02.05.2021

Назовем натуральное число m допустимым, если существует такое n, что из чисел 1,2,…,n можно составить сумму произведений, в которой каждое число встречается ровно один раз, равную m. Сколько существует недопустимых чисел? Примечание: в суммах произведений допускаются одиночные слагаемые. Например, число 148 допустимо, поскольку 148=1·3 + 2·5·8 + 4 + 6·9 + 7.

1=1; 2=1\*2; 3=1+2; **(4);** 5=1\*2+3; 6=1+2+3=1\*2\*3; 7=1+2\*3; **(8);** 9=1\*2+3+4; 10=1+2+3+4=1\*2\*3+4; 11=1+2\*3+4=1\*2\*4+3; 12=1+2\*4+3;

**(13);** 14=1\*3\*4+2=1\*2+3+4+5; 15=1+2+3\*4=1+2+3+4+5=1\*2\*3+4+5;

∑{1\_n} = n(n+1)/2;

Когда n>4, мы всегда можем получить m=[n(n+1)/2+1] сделав в сумме 1\_n только одного неодиночного слагаемого,

и это 2\*3, и так как (2\*3-2-3)=1, если оставить все остальные числа «одиночными», и неодиночным сделать только 2\*3,

то в сумме получим [n(n+1)/2+1]

{m=[n(n+1)/2+2]; 2\*4 :-> (2\*4-2-4)=2};

{m=[n(n+1)/2+3]; 2\*5 :-> (2\*5-2-5)=3}

{m=[n\*(n+1)/2+2\*t+3]; 0<t≤(n-3)}; 3\*(3+t) :-> n(n+1)/2+3\*(3+t)-3-(3+t)=n(n+1)/2+2t+3=m

{m=[n(n+1)/2+2t+2]; 0<t≤(n-3)}; 1\*3\*(3+t) :-> n(n+1)/2+1\*3\*(3+t)-1-3-(3+t)=n(n+1)+2t+2=m

∑{1\_(n+1)}-∑{1\_n)}=(n+1); Когда n>4, множество чисел {1,2,3,{(2t+2);(2t+3)} | t=1\_(n-3)} покрывает всё множество {1\_(2n-3)};

А значит когда n>4 то всегда [n(n+1)/2+{1,2,3,{(2t+2);(2t+3)} | t=1\_(n-3)}] покрывает всё множество [n(n+1)/2+1]\_(n+1)(n+2)/2.

Когда n>4; m=[n(n+1)/2+k] {0<k≤(n+1)}, и {k} = {1,2,3} мы такой «m» всегда сможем выразить с помощью 1\_n

в котором все слагаемые будут одиночными, кроме соответственно для k=1 :-> 2\*3; k=2 :-> 2\*4; k=3 :-> 2\*5;

Когда k>3 и оно чётное, то мы такое «m» сможем выразить с помощью {1\_n} в котором единственное неодиночное слагаемое это

1\*3\*[(k+4)/2] и оно «n(n+1)/2» даст «прибавку» [3(k+4)/2-(k+4)/2-4]=k и таким образом получим m=[n(n+1)/2+k]

(так как (k+4)/2≥4 :-> k>3 и так как максимальное max(k)=(n+1) и n>4 то число [(n+1)+4]/2≤n а значит,

для любого чётного 3<k≤(n+1) (n>4; k mod 2=0) мы сможем выразить m=[n(n+1)/2+k] с помощью 1\_n сделав только одно слагаемое неодиночным, и это 1\*3\*[(k+4)/2] )

Когда k>3 и оно нечётное, то мы такое «m» сможем выразить с помощью {1\_n} в котором единственное неодиночное слагаемое это

3\*[(k+3)/2] и оно «n(n+1)/2» даст «прибавку» [3(k+3)/2-(k+3)/2-3]=k и таким образом получим m=[n(n+1)/2+k]

(так как (k+3)/2≥4 :-> k>4 и так как максимальное max(k)=(n+1) и n>4 то число [(n+1)+3]/2≤n а значит,

для любого нечётного 3<k≤(n+1) (n>4; k mod 2=1) мы сможем выразить m=[n(n+1)/2+k] с помощью 1\_n сделав только одно слагаемое неодиночным, и это 3\*[(k+3)/2] )

И получается, что, любое m>15 мы сможем выразить с помощью 1\_n, где n(n+1)/2<m≤(n+1)(n+2)/2 то есть m=[n(n+1)/2+k] (0<k≤(n+1))

Значит недопустимые «m» могут существовать только в 1\_15, и это 4, 8 и 13, так как мы показали, что все остальные числа из 1\_15 допустимые

**Ответ: Множество недопустимых {m} = (4;8;13)**

ОБОБЩЕНИЕ

«Недопустимое число» означает, что количество его представлении в виде суммы слагаемых из произведений чисел, в котором присутствуют только числа из некого множества {1\_n}, так что каждое число из этого множества, присутствует ровно один раз, то максимальное количество таких представлении у «недопустимого» число ровно «0».

Поэтому обобщением этой задачи будет, поиск тех чисел, у которых максимальное количество попарно разных представлении ровно «R», (R неотрицательное целое число)

Но так как, R уже не обязательно чтобы = 0, надо ввести более чёткое определение, что такое «**максимальное количество**» и что такое «**попарно разные представления**».

Если «m», можем представить только с помощью n={n1,n2,…,nk} и соответственно его количество «попарно разных» представлении {r1,r2,…,rk},

то тогда **«максимальное количество»** попарно разных представлении Rm=max{r1,r2,…,rk},

**«Попарно разные»** представлении, можно трактовать как обычно, так и с примечанием - что если два представления отличаются от друг друга, лишь перестановкой единицы в произведениях, то такие представления не будут считаться «попарно разными». (то есть когда 1 из 1\_n в обеих случаях участвует в некем произведении, и только этим отличаются эти два представления, то их не считаем «попарно разными»)

Например, число 5 в первой трактовке имеет две попарно разных представлении и это 5=(1\*2+3) и 5=(2+1\*3), но во второй трактовке эти две представления числа 5, не являются попарно разными, и поэтому во второй трактовке будет считаться что 5 имеет одно представление. А вот для 6, в обеих трактовках по две попарно разные представления, и это 6=(1+2+3) и 6=1\*2\*3.

Дальше, будем акцентировать внимание на вторую трактовку «**попарно разных представлении**», то есть на ту, которая с примечанием - когда два представления отличаются от друг друга, лишь перестановкой единицы в произведениях, то такие представления не будут считаться «попарно разными».

Посчитаем количество всех возможных представлении «d» от 1 до 27 для второй трактовки «попарно разных представлении».

(«d» это «прибавка» к сумме чисел 1\_n из-за произведений чисел в слагаемых, и ниже для каждого «d» будут «выписаны» именно суммы этих произведения)

1-{2\*3,1\*2\*4}; 2-{2\*4,1\*2\*5}; 3-{2\*5,1\*2\*6}; 4-{1\*3\*4, 2\*6,1\*2\*7}; 5-{3\*4,2\*7,1\*2\*8}; 6-{1\*3\*5, 2\*8,1\*2\*9}; 7-{3\*5,(1\*2\*5+3\*4),2\*9,1\*2\*10};

8 – (1\*2\*4+3\*5), (2\*5+3\*4), (1\*2\*6+3\*4), 1\*3\*6, 2\*10, 1\*2\*11;

9 – (2\*4+3\*5), 3\*6, (2\*6+3\*4), (1\*2\*7+3\*4), 2\*11,1\*2\*12;

10 – **1\*4\*5, (1\*2\*4+3\*6), (1\*2\*6+3\*5), 1\*3\*7,(2\*7+3\*4),(1\*2\*8+3\*4),**2\*12;1\*2\*13;

11 – **4\*5, (1\*2\*3+4\*5), (2\*4+3\*6), (1\*2\*5+3\*6), (2\*6+3\*5), (1\*2\*7+3\*5), 3\*7, (2\*8+3\*4), (1\*2\*9+3\*4),** 2\*13, 1\*2\*14;

12 – **(2\*3+4\*5), (2\*5+3\*6), (2\*7+3\*5), (1\*2\*8+3\*5), 1\*3\*8, (2\*9+3\*4),** (1\*2\*10+3\*4), 2\*14, 1\*2\*15;

13 – **1\*4\*6, (2\*4+3\*7), (1\*2\*5+3\*7), (1\*2\*7+3\*6), (2\*8+3\*5), (1\*2\*9+3\*5),** (2\*10+3\*4), (1\*2\*11+3\*4), 2\*15, 1\*2\*16;

14 – **1\*2\*3\*4, 4\*6, (1\*2\*3+4\*6), (1\*2\*6+4\*5), (2\*5+3\*7), (1\*2\*6+3\*7), (2\*7+3\*6), (1\*2\*8+3\*6), (1\*2\*4+3\*8), 1\*3\*9, (2\*9+3\*5)**, (1\*2\*10+3\*5), (2\*11+3\*4), (1\*2\*12+3\*4), 2\*16, 1\*2\*17;

15 – **2\*3\*4, (2\*3+4\*6), (2\*6+4\*5), (1\*2\*7+4\*5), (2\*6+3\*7), (2\*4+3\*8), (1\*2\*5+3\*8), (2\*8+3\*6), (1\*2\*9+3\*6), 3\*9,** (2\*10+3\*5), (1\*2\*11+3\*5), (2\*12+3\*4), (1\*2\*13+3\*4), 2\*17, 1\*2\*18;

16 – **(1\*2\*5+4\*6), 1\*4\*7, (2\*7+4\*5), (1\*2\*8+4\*5), (1\*2\*8+3\*7), (2\*5+3\*8), (1\*2\*6+3\*8), (1\*2\*4+3\*9), (2\*9+3\*6**), 1\*3\*10, (1\*2\*10+3\*6), (2\*11+3\*5), (1\*2\*12+3\*5), (2\*13+3\*4), (1\*2\*14+3\*4), 2\*18, 1\*2\*19;

17 – **(2\*5+4\*6), 4\*7, (1\*2\*3+4\*7), (2\*8+4\*5), (2\*6+3\*8), (1\*2\*7+3\*8), (2\*8+3\*7), (1\*2\*9+3\*7), (1\*2\*9+4\*5), (2\*4+3\*9), (1\*2\*5+3\*9),** 3\*10, (2\*10+3\*6), (1\*2\*11+3\*6), (2\*12+3\*5), (1\*2\*13+3\*5), (2\*14+3\*4), (1\*2\*15+3\*4), 2\*19, 1\*2\*20;

18 – **1\*5\*6, (2\*3+4\*7), (1\*2\*7+4\*6), (2\*7+3\*8), (2\*9+4\*5), (2\*9+3\*7), (2\*5+3\*9), (1\*2\*6+3\*9),** (1\*2\*10+4\*5), (1\*2\*10+3\*7), (1\*2\*4+3\*10), 1\*3\*11, (2\*11+3\*6), (1\*2\*12+3\*6), (2\*13+3\*5), (1\*2\*14+3\*5), (2\*15+3\*4), (1\*2\*16+3\*4), 2\*20, 1\*2\*21;

19 – **1\*2\*3\*5, 5\*6, (1\*2\*3+5\*6), (1\*3\*6+4\*5), (1\*2\*5+4\*7), (2\*7+4\*6), 1\*4\*8, (1\*2\*8+4\*6), (1\*2\*9+3\*8), (2\*6+3\*9), (1\*2\*7+3\*9)**, (2\*10+4\*5), (2\*10+3\*7), (1\*2\*11+4\*5), (1\*2\*11+3\*7), (2\*12+3\*6), (1\*2\*13+3\*6), (2\*14+3\*5), (1\*2\*15+3\*5), (2\*16+3\*4), (1\*2\*17+3\*4), 2\*21, 1\*2\*22;

20 – **2\*3\*5, (2\*3+5\*6), (1\*2\*4+5\*6), (3\*6+4\*5), (1\*3\*5+4\*6), (2\*5+4\*7), (1\*2\*6+4\*7), 4\*8, (1\*2\*3+4\*8), (2\*8+4\*6), (1\*2\*9+4\*6), (2\*7+3\*9), (1\*2\*8+3\*9), (2\*9+3\*8),** (1\*2\*10+3\*8), (2\*11+3\*7), (1\*2\*12+3\*7), (2\*13+3\*6), (1\*2\*14+3\*6), (2\*15+3\*5), (1\*2\*16+3\*5), (2\*17+3\*4), (1\*2\*18+3\*4), 2\*22, 1\*2\*23;

21 – **(2\*4+5\*6), (3\*5+4\*6), (2\*6+4\*7), (1\*3\*7+4\*5), (2\*3+4\*8), (2\*9+4\*6), (2\*8+3\*9),** (1\*2\*10+4\*6), (2\*6+3\*10), (1\*2\*7+3\*10), (2\*4+3\*11), (1\*2\*5+3\*11), (2\*12+4\*5), 3\*12, (1\*2\*13+4\*5), 2\*23, 1\*2\*24;

22 – **1\*5\*7, (3\*7+4\*5), (1\*2\*5+4\*8), (1\*2\*8+4\*7), 1\*4\*9, (2\*10+4\*6), (2\*7+3\*10), (1\*2\*8+3\*10), (1\*2\*10+3\*9),** (1\*2\*11+4\*6), (2\*5+3\*11), (1\*2\*6+3\*11), (2\*11+3\*8), (1\*2\*12+3\*8),

(1\*2\*4+3\*12), 1\*3\*13, (2\*13+3\*7), (1\*2\*14+3\*7), (2\*15+3\*6), (1\*2\*16+3\*6), (2\*17+3\*5), (1\*2\*18+3\*5), (2\*19+3\*4), (1\*2\*20+3\*4), 2\*24, 1\*2\*25.

23 – **5\*7, (1\*2\*3+5\*7), (1\*2\*7+5\*6), (1\*3\*4+5\*6), (1\*3\*5+4\*7), (1\*3\*8+4\*5), (2\*5+4\*8), (1\*2\*6+4\*8), (2\*8+4\*7), (1\*2\*9+4\*7), (2\*10+3\*9), (2\*8+3\*10), (1\*2\*9+3\*10),**

(2\*11+4\*6), (1\*2\*11+3\*9), (2\*6+3\*11), (1\*2\*7+3\*11), (1\*2\*12+4\*6), (2\*4+3\*12), (1\*2\*5+3\*12), (2\*12+3\*8), и так далее

24 – **1\*2\*3\*6, (2\*3+5\*7), (1\*2\*4+5\*7), (2\*7+5\*6), (3\*4+5\*6), (3\*5+4\*7), (1\*3\*7+4\*6), (1\*2\*7+3\*6+4\*5), (1\*2\*8+5\*6), (2\*6+4\*8), (1\*2\*7+4\*8), (3\*8+4\*5), (2\*9+4\*7), (2\*3+4\*9),**

**(2\*7+3\*11), (1\*2\*8+3\*11), (2\*9+3\*10), (1\*2\*10+3\*10), (2\*11+3\*9),** (1\*2\*12+3\*9), (2\*5+3\*12), (1\*2\*6+3\*12), (1\*2\*4+3\*13), (2\*13+3\*8), 1\*3\*14, (1\*2\*14+3\*8), (2\*15+3\*7), (1\*2\*16+3\*7), (2\*17+3\*6), (1\*2\*18+3\*6), (2\*19+3\*5), (1\*2\*20+3\*5), (2\*21+3\*4), (1\*2\*22+3\*4), 2\*26, 1\*2\*27.

25 – **2\*3\*6, (2\*4+5\*7), (2\*8+5\*6), (1\*2\*9+5\*6), (1\*3\*6+4\*7), (3\*7+4\*6), (2\*7+3\*6+4\*5), (1\*2\*7+3\*5+4\*6), (2\*7+4\*8), (1\*3\*9+4\*5), (2\*10+4\*7), (1\*2\*11+4\*7), (1\*2\*5+4\*9), (1\*3\*9+4\*5),**

**(2\*8+3\*11), (1\*2\*9+3\*11), (1\*2\*11+3\*10),** (2\*12+3\*9), (1\*2\*13+3\*9), (2\*6+3\*12), (1\*2\*7+3\*12), (2\*4+3\*13), (1\*2\*5+3\*13), (2\*14+3\*8), 3\*14, (1\*2\*15+3\*8), (2\*16+3\*7), (1\*2\*17+3\*7), (2\*18+3\*6), (1\*2\*19+3\*6), (2\*20+3\*5), (1\*2\*21+3\*5), (2\*22+3\*4), (1\*2\*23+3\*4), 2\*27, 1\*2\*28.

26 – **(1\*2\*6+5\*7), (2\*9+5\*6), (1\*2\*10+5\*6), (3\*6+4\*7), (1\*3\*5+4\*8), (1\*3\*8+4\*6), (2\*8+3\*6+4\*5), (1\*2\*8+3\*5+4\*6), (1\*2\*9+4\*8), (3\*9+4\*5), (2\*11+4\*7), (1\*2\*6+4\*9),**

**(2\*7+3\*12), (1\*2\*8+3\*12), (2\*9+3\*11), (1\*2\*10+3\*11), (2\*11+3\*10), (1\*2\*12+3\*10),** (2\*13+3\*9), (1\*2\*14+3\*9), (2\*5+3\*13), (1\*2\*6+3\*13), 1\*3\*15, (2\*15+3\*8), (2\*17+3\*7), (1\*2\*16+3\*8), (2\*19+3\*6), (1\*2\*20+3\*6), (2\*21+3\*5), (1\*2\*22+3\*5), (2\*23+3\*4), (1\*2\*24+3\*4), 2\*28, 1\*2\*29.

27 – **(2\*6+5\*7), (2\*10+5\*6), (1\*2\*11+5\*6), (3\*5+4\*8), (3\*8+4\*6), (2\*9+3\*6+4\*5), (2\*8+3\*5+4\*6), (2\*9+4\*8), (1\*2\*10+4\*8), (1\*3\*10+4\*5), (2\*12+4\*7), (1\*2\*7+4\*9),**

**(2\*8+3\*12), (1\*2\*9+3\*12), (2\*10+3\*11), (2\*12+3\*10),** (1\*2\*13+3\*10), (2\*6+3\*13), (1\*2\*7+3\*13),(2\*14+3\*9), (1\*2\*15+3\*9), (2\*4+3\*14), (1\*2\*5+3\*14), (2\*16+3\*8), 3\*15, (1\*2\*17+3\*8), (2\*18+3\*7), (1\*2\*19+3\*7), (2\*20+3\*6), (1\*2\*21+3\*6), (2\*22+3\*5), (1\*2\*23+3\*5), (2\*24+3\*4), (1\*2\*25+3\*4), 2\*29, 1\*2\*30.

Обозначим количество представлении «d» в которых участвуют числа из 1\_n через F{d; n}. (Напоминаю, «d» это «прибавка» к сумме 1\_n, то есть «прибавка» к «n(n+1)/2»)

Допустим утверждение **F{(n+2)≤d≤(2n+3); a≤n≤b} > k** верна. Тогда для того чтобы доказать, что утверждение **F{(n+2)≤d≤(2n+3); a≤n≤(b+1)} > k** тоже верна,

остаётся доказать что утверждение верна для **F{(n+2)≤d≤(2n+3); n=(b+1)} > k** . Но так как **F{(n+2)≤d≤(2n+3); n=b} > k**

отсюда следует что, если две неравенства **F{d=[2(b+1)+2]; n=(b+1)}>k**; и **F{d=[2(b+1)+3]; n=(b+1)}>**k верны, то и утверждение **F{(n+2)≤d≤(2n+3); a≤n≤(b+1)} > k** верное.

И если это сможем доказать, тогда по индукции получим что, и для всех n≥a утверждение **F{(n+2)≤d≤(2n+3); n≥а} > k** окажется верным.

А из этого будет следовать что и параллельное утверждение **m>(a+1)(a+2)/2 :-> Rm>k** будет верным.

Мы в таблице представлении для d≤27 видим что, неравенство F{(n+2)≤d≤(2n+3); 9≤n≤12} > 5 выполняется, а значит, даже для второй трактовки «попарно разных», когда 55<m≤105, то всегда количество представлении такого числа с помощью чисел 1\_n {9≤n≤12} будет больше 5, где «n» подбирается так, чтобы выполнялись неравенства {(n+1)(n+2)/2<m≤(n+2)(n+3)/2; n≥9};

А теперь давайте, введём дополнительное обозначение для количество представлении «d» с помощью суммы ровно двух произведении (то есть все слагаемые «одиночные», кроме двух слагаемых), где в каждом произведении участвуют по два числа из 1\_n и в одном произведении обязательно участвует 2, а во втором 3, то количество такого плана представлении «d» для некого конкретного «n» обозначим f(d2,3;n).

(для наглядного разъяснения, что такое «количество представлении «d» с помощью только сумм произведении 2 и 3»,

например, представлении «d» с помощью 2 и 3 для n=12, d=26 это **(2\*7+3\*12), (1\*2\*8+3\*12), (2\*9+3\*11), (1\*2\*10+3\*11), (2\*11+3\*10), (1\*2\*12+3\*10)**

а для n=12, d=27 это **(2\*8+3\*12), (1\*2\*9+3\*12), (2\*10+3\*11), (2\*12+3\*10)**

а значит «количество представлении «d» с помощью только сумм произведении 2 и 3» для n=12, d=26, f{d2,3=26; n=12}=6, а для n=12, d=27; f{d2,3=27; n=12}=4)

И f(d2,3;n), можно всегда чётко вычислить

Докажем, что, когда n>12, количество представлении «d» с помощью даже только суммы произведении 2 и 3 уже превышают 5. То есть что f((n+2)≤d2,3≤(2n+3); n>12)>5.

А так как, выше показали, для того чтобы доказать что f((n+2)≤d2,3≤(2n+3); n>12)>5, для этого достаточно показать что выполняются два неравенства

1. f(d2,3=(2n+3); n>12)>5. 2. f(d2,3=(2n+2); n>12)>5

Для d=2n+3; число «х» на которое будет умножатся «2» когда «3» будет умножатся на «n» можно вычислить

d=2n+3; d=2\*x+3\*n-(n+x+2+3)=2n+x-5 :=> x=8;

d=2n+3 :=> {d :-> (2\*8+3\*n), (1\*2\*9+3n), ]2\*10+3\*(n-1)], [1\*2\*11+3\*(n-1)], …, {[2\*n+3\*(n/2+4)] если «n» чётное, а если «n» нечётное, то в конце [1\*2\*n+3\*(n+9)/2]} ->

и получается что, для m=n(n+1)/2+2n+3; d=2n+3; количество таких представлении f(d2,3;n) -> {(n-1) mod 3=0 :-> f(d2,3;n)=(n-7)}; {(n-1) mod 3>0 :-> f(d2,3;n)=(n-8)}

и так как (13-1) mod 3=0, значит для n=13, m=120, d=29, -> f(d2,3;13)=(13-7)=6; и для всех n>12; f(d2,3=(2n+3); n>12)>5

Для m=n(n+1)/2+2n+2 :=> d=2n+2; тогда число «х» на которое будет умножатся «2» когда «3» будет умножатся на «n» можно вычислить

d=2n+2; d=2\*x+3\*n-(n+x+2+3)=2n+x-5 -> x=7;

d=2n+2 :-> {d:->(2\*7+3\*n), (1\*2\*8+3\*n), (2\*9+3\*(n-1)), …, (2\*n+3\*(n+7)/2) если «n» нечётное, а если «n» чётное, то в конце (1\*2\*n+3\*(n+8)/2)}

:=> {n mod 3=0 :-> f(d2,3;n)=(n-6)}; {n mod 3>0 :-> f(d2,3;n)=(n-7)}

и получается, что, для всех n>12 выполняются неравенства - 1. f(d2,3=(2n+3); n>12)>5; 2. f(d2,3=(2n+2); n>12)>5

добавив к ним ещё и n=9,10,11,12 которых мы показали выше в таблице для «d», и получаем что

{n>8; (n+1)(n+2)/2<m≤(n+2)(n+3)/2} :-> F{(n+2)≤d≤(2n+3); n>8)>5 :=> {m>55; Rm>5}

**То есть строго доказали, что для всех m>55, соответственный Rm>5**

**А теперь посчитаем количество представлении чисел включая [9\*(9+1)/2+2\*9+3]=55. И таким образом сможем выписать все числа,**

**у которых количество представлении соответственно 0, 1, 2, 3, 4, 5.**

1=1; 2=1\*2; 3=(1+2); 5=(1\*2+3); **6**=1\*2\*3=(1+2+3); 7=(1+2\*3); 9=(1\*2+3+4); **10**=(1+2+3+4)=(1\*2\*3+4); 11=(1+2\*3+4)=(1\*3+2\*4); 12=(1+2\*4+3); 141\_4=(1\*2+3\*4); 141\_5=(1\*2+3+4+5); **15**1\_4=(1+2+3\*4); **15**1\_5=(1+2+3+4+5)=(1\*2\*3+4+5); 16=(1+2\*3+4+5)=(1\*3+2\*4+5); 17=(1+2\*4+3+5)=(1\*3+2\*5+4); 18=(1+2\*5+3+4); 19=(1\*3\*4+2+5);

201\_5=(1+2+3\*4+5); 201\_6=(1\*2+3+4+5+6); **21**1\_6=(1+2+3+4+5+6)=(1\*2\*3+4+5+6); **21**1\_5=(1\*2+3\*5+4);

221\_5=(1\*2\*5+3\*4)=(1+2+3\*5+4); 221\_6=(1+2\*3+4+5+6)=(1\*3+2\*4+5+6); 231\_6=(1+2\*4+3+5+6)=(1\*3+2\*5+4+6); 231\_5=(1+2\*5+3\*4)=(1\*2\*4+3\*5); 241\_4=(1\*2\*3\*4); 241\_5=(1+2\*4+3\*5); 241\_6=(1+2\*5+3+4+6)=(1\*3+2\*6+4+5); 251\_6=(1\*2+3\*4+5+6)=(1+2\*6+3+4+5); 251\_5=(1\*2+3+4\*5); 251\_4=(1+2\*3\*4); 261\_6=(1+2+3\*4+5+6); 261\_5=(1+2+3+4\*5)=(1\*2\*3+4\*5);

271\_5=(1+2\*3+4\*5); 271\_6=(1\*2+3\*5+4+6); 271\_7=(1\*2+3+4+5+6+7); **28**1\_7=(1+2+3+4+5+6+7)=(1\*2\*3+4+5+6+7); **28**1\_6=(1+2+3\*5+6)=(1\*2\*5+3\*4+6);

291\_5=(1\*2\*3\*4+5) =(1\*2\*6+3\*4+5); 291\_6=(1\*2\*4+3\*5+6)=(1+2\*5+3\*4+6); 291\_7=(1+2\*3+4+5+6+7)=(1\*2\*4+3+56+7);

301\_5=(1+2\*3\*4+5); 301\_6=(1+2\*4+3\*5+6)=(1+2+3\*6+4+5) =(1+2\*6+3\*4+5); 301\_7=(1+2\*4+3+5+6+7)=(1\*2\*5+3+4+6+7);

311\_6=(1\*2\*6+3\*5+4)=(1\*2\*4+3\*6+5); 311\_7=(1+2\*5+3+4+6+7)=(1\*2\*6+3+4+5+7)

321\_6=(1+2\*6+3\*5+4)=(1+2\*4+3\*6+5)=(1+2+3+4\*5+6)=(1\*2\*5+3\*6+4)=(1\*2\*3+4\*5+6); 321\_7=(1+2\*6+3+4+5+7)=(1\*2\*7+3+4+5+6)=(1\*2+3\*4+5+6+7)

331\_6=(1+2\*5+3\*6+4)=(1+2\*3+4\*5+6); 331\_7=(1+2+3\*4+5+6+7)=(1+2\*7+3+4+5+6)

345=(1\*2\*3\*5+4); 346=(1\*2+3+4\*6+5); 347=(1\*2+3\*5+4+6+7)

355=(1+2\*3\*5+4); 356=(1+2+3+4\*6+5)=(1\*2\*3+4\*6+5)=(1\*2\*6+3+4\*5)=(1\*2\*3\*4+5+6); 357=(1+2+3\*5+4+6+7)=(1\*2\*5+3\*4+6+7); 358=(1\*2+3+4+5+6+7+8)

**36**6=(1+2\*3+4\*6+5)=(1+2\*6+3+4\*5)=(1+2\*3\*4+5+6); **36**7=(1\*2+3\*6+4+5+7)=(1+2\*5+3\*4+6+7)=(1\*2\*6+3\*4+5+7)=(1\*2\*4+3\*5+6+7); **36**8=(1+2+3+4+5+6+7+8)=(1\*2\*3+4+5+6+7+8)

376=(1\*3+2\*5+4\*6); 377=(1+2+3\*6+4+5+7)=(1+2\*6+3\*4+5+7)=(1\*2\*7\*+3\*4+5+6)=(1+2\*4+3\*5+6+7); 378=(1+2\*3+4+5+6+7+8)=(1\*2\*4+3+5+6+7+8)

386=(1+2\*5+3+4\*6)=(1\*2+3\*7+4+5+6); 387=(1\*2+3+4\*5+6+7)=(1+2\*7+3\*4+5+6)=(1\*2\*4+3\*6+5+7)=(1\*2+3\*7+4+5+6)=(1\*2\*6+3\*5+4+7); 388=(1+2\*4+3+5+6+7+8)=(1\*2\*5+3+4+6+7+8)

396=(1\*2+3+4+5\*6); 397=(1+2+3\*7+4+5+6)=(1+2+3+4\*5+6+7)=(1\*2\*3+4\*5+6+7)=(1\*2\*7+3\*5+4+6)=(1+2\*4+3\*6+5+7)=(1\*2\*5+3\*6+4+7)=(1+2\*6+3\*5+4+7);

398=(1+2\*5+3+4+6+7+8)=(1\*2\*6+3+4+5+7+8)

406=(1+2+3+4+5\*6)=(1\*2\*3+4+5\*6)=(1\*2+3\*6+4\*5)=(1\*2\*3\*5+4+6); 407=(1+2\*3+4\*5+6+7)=(1+2\*7+3\*5+4+6)=(1+2\*5+3\*6+4+7)=(1\*2\*4+3\*7+5+6)

408=(1+2\*6+3+4+5+7+8)=(1\*2\*7+3+4+5+6+8)=(1\*2+3\*4+5+6+7+8)

416=(1+2\*3+4+5\*6)=(1\*2\*4+3+5\*6)=(1+2+3\*6+4\*5)=(1\*2+3\*5+4\*6)=(1+2\*3\*5+4+6); 417=(1\*2+3+4\*6+5+7)=(1\*2\*7+3\*6+4+5)=(1+2\*4+3\*7+5+6)=(1\*2\*5+3\*7+4+6)

418=(1+2\*7+3+4+5+6+8)=(1\*2\*8\_3+4+5+6+7)=(1+2+3\*4+5+6+7+8);

426=(1+2\*4+3+5\*6)=(1+2+3\*5+4\*6); 427=(1+2+3+4\*6+5+7)=(1\*2\*3+4\*6+5+7)=(1+2\*7+3\*6+4+5)=(1+2\*5+3\*7+4+6)=(1\*2\*6+3\*7+4+5)=(1\*2\*6+3+4\*5+7)=(1\*2\*3\*4+5+6+7)

428=(1+2\*8+3+4+5+6+7)=(1\*2+3\*5+4+6+7+8);

437=(1+2\*3+4\*6+5+7)=(1+2\*7+3\*6+4+5)=(1+2\*6+3\*7+4+5)=(1+2\*6+3+4\*5+7)=(1\*2\*7+3+4\*5+6)=(1+2\*3\*4+5+6+7);

438=(1+2+3\*5+4+6+7+8)=(1\*2\*5+3\*4+6+7+8);

447=(1\*2\*5+3+4\*6+7)=(1+2\*7+3+4\*5+6)=(1\*2+3+4\*7+5+6); 448=(1\*2\*4+3\*5+6+7+8)=(1+2\*5+3\*4+6+7+8)=(1\*2\*6+3\*4+5+7+8)=(1\*2+3\*6+4+5+7+8); 449=(1\*2+3+4+5+6+7+8+9)

**456**=(1\*2\*3\*6+4+5); **45**7=(1+2\*5+3+4\*6+7)=(1+2+3+4\*7+5+6)=(1\*2\*3+4\*7+5+6)=(1\*2\*3\*6+4+5); **45**8=(1+2\*4+3\*5+6+7+8)=(1+2\*6+3\*4+5+7+8)=(1\*2\*7+3\*4+5+6+8)=(1+2+3\*6+4+5+7+8);

**45**9=(1+2+3+4+5+6+7+8+9) =(1\*2\*3+4+5+6+7+8+9)

466=(1+2\*3\*6+4+5); 467=(1+2\*3+4\*7+5+6)=(1\*5\*6+2+3+4+7); 468=(1\*2\*6+3\*5+4+7+8)=(1+2\*7+3\*4+5+6+8)=(1\*2\*8+3\*4+5+6+7)=(1\*2\*4+3\*6+5+7+8)=(1+2\*3\*6+4+5);

469=(1+2\*3+4+5+6+7+8+9)=(1\*2\*4+3+5+6+7+8+9)

477=(1+5\*6+2+3+4+7)=(1\*2\*3+4+5\*6)=(1\*2\*5+3+4\*7+6)=(1\*2\*3\*5+4+6+7); 478=(1+2\*6+3\*5+4+7+8)=(1\*2\*7+3\*5+4+6+8)=(1+2\*8+3\*4+5+6+7)=(1+2\*4+3\*6+5+7+8)=(1\*2\*5+3\*6+4+7+8)=(1+2+3+4\*5+6+7+8)=(1\*2\*3+4\*5+6+7+8);

479=(1+2\*4+3+5+6+7+8+9) =(1\*2\*5+3+4+6+7+8+9)

487=(1+2\*3+4+5\*6+7)=(1+2\*3\*5+4+6+7)=(1\*2\*4+3+5\*6+7)=(1+2\*5+3+4\*7+6)=(1\*2\*6+3+4\*7+5)=(1\*3\*5+2+4\*6+7)=(1+3\*6+2+4\*5+7); 488=(1+2\*7+3\*5+4+6+8)=(1\*2\*8+3\*5+4+6+7)=(1+2\*5+3\*6+4+7+8)=(1+2\*3+4\*5+6+7+8)=(1\*2\*4+3\*7+5+6+8); 489=(1+2\*4+3+5+6+7+8+9) =(1\*2\*5+3+4+6+7+8+9)

497=(1+2\*4+3+5\*6+7)=(1+2\*6+3+4\*7+5)=(1+2+3\*5+4\*6+7)=(1\*3\*7+2+4\*5+6); 498=(1+2\*8+3\*5+4+6+7)=(1\*2\*7+3\*6+4+5+8)=(1+2\*4+3\*7+5+6+8)=(1\*2\*5+3\*7+4+6+8);

499=(1\*2\*7+3+4+6+5+8+9)=(1+2\*6+3+4+5+7+8+9)=(1\*3\*4+2+5+6+7+8+9)

507=(1+3\*7+2+4\*5+6); 508=(1+2\*7+3\*6+4+5+8)=(1\*2\*8+3\*6+4+5+7)=(1\*2\*6+3\*7+4+5+8)=(1+2\*5+3\*7+4+6+8)=(1\*2\*6+4\*5+3+7+8)=(1+2+3+4\*6+5+7+8)=(1\*2\*3+4\*6+5+7+8)=(1\*2\*4+3\*8+5+6+7) =(1\*2\*3\*4+5+6+7+8); 509=(1+2\*7+3+4+6+5+8+9) =(1\*2\*8+3+4+5+6+7+9)=(1+2+3\*4+5+6+7+8+9)

517=(1\*3\*5+2+4\*7+6); 518=(1+2\*8+3\*6+4+5+7)=(1+2\*6+3\*7+4+5+8)=(1+2\*6+4\*5+3+7+8)=(1\*2\*7+3+4\*5+6+8)=(1+2\*3+4\*6+5+7+8)=(1+2\*3\*4+5+6+7+8)=(1+2\*4+3\*8+5+6+7)=(1\*2\*5+3\*8+4+6+7);

519=(1\*2\*9+3+4+5+6+7+8) =(1+2\*8+3+4+5+6+7+9)=(1\*3\*5+2+4+6+7+8+9)

527=(1+3\*5+2+4\*7+6)=(1\*3\*7+2+4\*6+5)=(1+2\*7+3+4+5\*6)=(1+3\*4+2+5\*6+7)=(1+2\*3+4+5\*7+6)=(1\*2\*4+3+5\*7+6)=(1\*2\*3\*6+4+5+7); 528=(1\*2\*8+3\*7+4+5+6)=(1+2\*7+4\*5+3+6+8)=(1\*2\*8+3+4\*5+6+7)=(1\*2\*5+4\*6+3+7+8)=(1+2\*5+3\*8+4+6+7)=(1\*2\*6+3\*8+4+5+7)=(1\*4\*7+2+3+5+6+8);

529=(1+2\*9+3+4+5+6+7+8) =(1+3\*5+2+4+6+7+8+9)=(1\*2\*5+3\*4+6+7+8+9)

537=(1\*3\*6+2+4\*7+5)=(1+3\*7+2+4\*6+5)=(1+2\*4+3+5\*7+6)=(1\*3\*4+2+5\*6+7)=(1+2\*3\*6+4+5+7);

538=(1+2\*8+3\*7+4+5+6)=(1+2\*7+4\*5+3+6+8)=(1\*2\*8+3+4\*5+6+7)=(1\*2\*5+4\*6+3+7+8)=(1+2\*5+3\*8+4+6+7)=(1\*2\*6+3\*8+4+5+7)=(1+4\*7+2+3+5+6+8);

539=(1\*2\*4+3\*5+6+7+8+9)=(1+2\*5+3\*4+6+7+8+9)=(1\*2+3\*6+4+5+7+8+9);

546=(1\*2\*3\*5+4\*6)=(1\*2\*3\*4+5\*6); 547=(1+3\*6+2+4\*7+5)=(1\*2\*6+3+4+5\*7)=(1+2\*6+3\*7+4\*5)=(1+2\*7+3\*5+4\*6)=(1+2+5+3\*6+4\*7);

548=(1\*5\*6+2+3+4+7+8)=(1\*2\*7+4\*6+3+5+8)=(1+2\*7+3\*8+4+5+6)=(1+4\*7+2\*3+5+6+8);

549=(1+2\*4+3\*5+6+7+8+9)=(1+2\*6+3\*4+5+7+8+9)=(1\*2\*7+3\*4+5+6+8+9)=(1+2+3\*6+4+5+7+8+9);

5410=(1\*2+3+4+5+6+7+8+9+10);

**55**6=(1+2\*3\*5+4\*6)=(1+2\*3\*4+5\*6); 557=(1+2\*6+3+4+5\*7)=(1\*3\*4+2+6+5\*7)=(1\*2\*6+3\*5+4\*7)=(1+2\*7+3\*5+4\*6);

**55**8=(1\*2\*3\*5+4+6+7+8)=(1+5\*6+2+3+4+7+8)=(1\*2\*3+5\*6+4+7+8)=(1+2\*7+4\*6+3+5+8)=(1\*2\*5+4\*7+3+6+8)=(1\*3\*6+2+4\*5+7+8)=(1\*4\*8+2+3+5+6+7)=(1\*2\*8+3+4\*6+8+7);

**55**9=(1\*4\*5+2+3+6+7+8+9)=(1\*2\*4+3\*6+5+7+8+9)=(1\*2\*6+3\*5+4+7+8+9)=(1+2\*7+3\*4+5+6+8+9)=(1\*2\*8+3\*4+5+6+7+9)=(1\*3\*7+2++4+5+6+8+9);

**55**10=(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10)=(1\*2\*3+4+5+6+7+8+9+10);

567=(1+3\*4+2+6+5\*7)=(1\*2+3+4+5+6\*7)=(1\*2\*5+3\*6+4\*7)=(1+2\*5+3\*7+4\*6)=(1+2\*6+3\*5+4\*7)=(1\*2\*4\*5+3+6+7)=(1\*2\*7+3\*4+5\*6);

568=(1+2\*3\*5+4+6+7+8)=(1\*2\*4+3+5\*6+7+8)=(1+2\*3+5\*6+4+7+8)=(1+2+3\*6+4\*5+7+8)=(1\*3\*5+2+4\*6+7+8)=(1+2\*8+4\*6+3+5+7)=(1+2\*5+4\*7+3+6+8)

=(1+3\*6+2+4\*5+7+8)=(1+4\*8+2+3+5+6+7)=(1\*2\*6+3+4\*7+5+8)=(1+2+3+4\*8+5+6+7)=(1\*2\*3+4\*8+5+6+7);

569=(1+4\*5+2+3+6+7+8+9)=(1\*2\*3+4\*5+6+7+8+9)=(1+2\*4+3\*6+5+7+8+9)=(1\*2\*5+3\*6+4+7+8+9)=(1\*2\*7+3\*5+4+6+8+9)

=(1+2\*6+3\*5+4+7+8+9)=(1+2\*8+3\*4+5+6+7+9)=(1\*2\*9+3\*4+5+6+7+8)=(1+3\*7+2++4+5+6+8+9);

5610=(1+2\*3+4+5+6+7+8+9+10)=(1\*2\*4+3+5+6+7+8+9+10);

**И получаем, что для второй трактовки «попарно разных представлении»**

**R=0 :-> {m} = {4, 8, 13};**

**R=1 :-> {m} = {1, 2, 3, 5, 7, 9, 12, 14, 18, 19, 20, 27, 34};**

**R=2 :-> {m} = {6, 10, 11, 15, 16, 17, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 28, 29, 31, 33};**

**R=3 :-> m = 30;**

**R=4 :-> {m} = {35, 36, 37, 40, 44, 46, 49, 54};**

**R=5 :-> {m} = {38, 41, 48}**

**А для первой трактовки «попарно разных представлении» получаем:**

**R=0 :-> {m}={4,8,13};**

**R=1 :-> {m}={1, 2, 3, 7, 18};**

**R=2 :-> {m}={5, 6, 12, 33};**

**R=3 :-> {m}={9, 10, 11, 19, 26};**

**R=4 :-> {m}={14, 15, 16, 17};**

**R=5 :-> {m}={20, 21, 22, 23, 24, 25, 34}**

**R=6 :-> {m}={27, 28, 29, 30, 31};**

**R=7 :-> m=37;**

**R=8 :-> {m}=пустое множество.**

**R=9 :-> {m}={43, 45};**

**R=10 :-> {m}=пустое множество.**

Можно заметить два интересных факта.

1. В первой трактовке для R=8 и для R=10 не существует соответственных «m»
2. Во второй трактовке, для R=3 существует единственная «m=30»

И исходя из этого можно составить задачи, например, при первой трактовке задать вопрос про минимальный «R» у которого нету решении.

А при второй трактовке, просто задать вопрос найти все «m» которые удовлетворяют R=3.