

Об отношении суммы длин диагоналей выпуклого многоугольника к его периметру

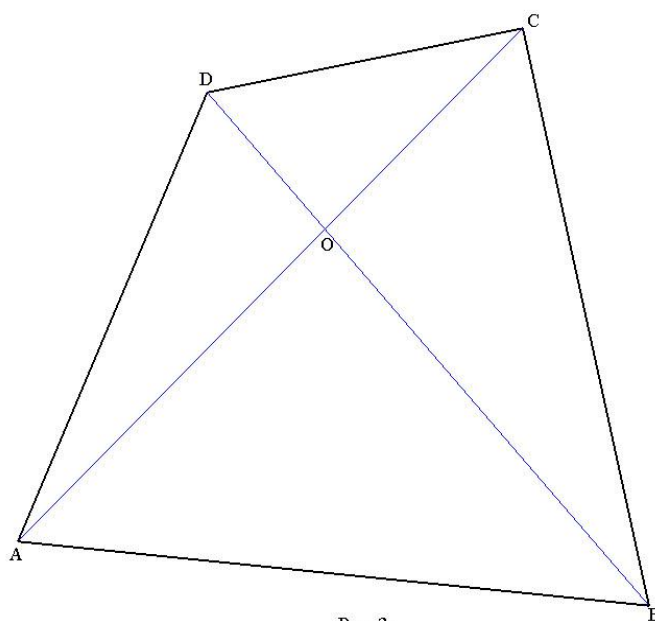
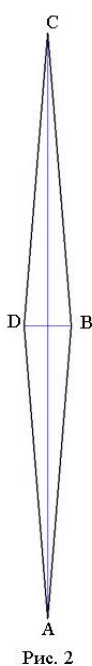
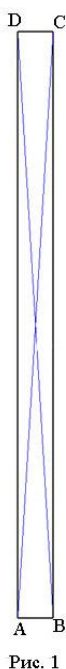
Задача, рассматриваемая в данной статье, по-видимому, впервые была решена румынским математиком Тибериу Поповичу. Впрочем, авторы монографии [1] утверждают, что верхняя граница для рассматриваемого отношения была высказана им лишь в качестве гипотезы. В дальнейшем, данный сюжет неоднократно использовался в задачах различных конкурсов и олимпиад (см., например, [2] и [3]).

Обозначим периметр выпуклого многоугольника буквой P , сумму длин его диагоналей – буквой S , а интересующее нас отношение $\frac{S}{P}$ – буквой q_n , где n – число сторон.

Начнем с самого простого многоугольника, имеющего диагонали – четырехугольника.

Как выяснится в дальнейшем, исследование уже этого частного случая приведет нас ко всем основным идеям, используемым для решения задачи в общем виде.

Рассмотрение простых частных случаев (квадрат, ромб с острым углом 60° , прямоугольник 3 на 4) показывает, что q_4 не является константой, но изменяется в относительно небольшом диапазоне в районе числа 0,7. Продолжая экспериментировать, легко обнаружить, что, если четырехугольник представляет собой вытянутый прямоугольник, искомое отношение становится близким к 1 (рис. 1). А что будет, если вытягивать не прямоугольник, а ромб (рис. 2)? Очевидно, интересующее нас отношение будет наоборот уменьшаться и неограниченно приближаться к 0,5.



Поскольку вытянутый ромб можно непрерывной деформацией трансформировать в вытянутый прямоугольник и при этом q_4 тоже будет меняться непрерывно, очевидно, исследуемое отношение может принимать любые значения из промежутка $(0,5; 1)^1$.

Заметим, что для получения значений q_4 , близких к единице и одной второй не обязательно рассматривать именно ромбы и прямоугольники. В первом случае сгодится любой четырехугольник, у которого две противоположных стороны очень малы и близки между собой, а две другие – наоборот велики и опять-таки приблизительно равны между собой. Для замены ромба тоже подойдет четырехугольник с парой длинных и парой

¹ Для читателей, которым рассуждения «неограниченно приближаться» и «можно деформировать» показались недостаточно строгими, отметим, что их можно сделать безупречными.

коротких сторон. Только теперь короткие (а значит, и длинные) стороны должны быть не противоположны, а смежны.

Но вдруг наши эксперименты не затронули еще какие-то другие четырехугольники, для которых q_4 может оказаться больше 1 или наоборот меньше 0.5? Убедиться в том, что это не так, нам поможет неравенство треугольника. Легко видеть (см. рис. 3), что: $AB + BC > AC$; $BC + CD > BD$; $CD + AD > AC$; $AD + AB > BD$. Складывая эти неравенства получим $2P > 2S$, т.е. $q_4 < 1$.

С другой стороны: $AO + BO > AB$; $BO + CO > BC$; $CO + DO > CD$; $DO + AO > AD$. Откуда $2S > P$, т.е. $\frac{1}{2} < q_4$.

Итак, с четырехугольниками мы разобрались: отношение суммы длин диагоналей к периметру выпуклого четырехугольника может быть любым числом, большим одной второй, но меньшим единицы.

На первый взгляд, для пятиугольников наша задача будет гораздо сложнее, ведь у них больше степеней свободы. Но зато у нас теперь имеется метод: экспериментируя с частными случаями (по-видимому, для наших целей лучше всего подойдут «сплюснутые» пятиугольники), постараться угадать искомый диапазон, а затем доказать, что любые числа из найденного диапазона достижимы, а все остальные нет.

Эксперимент показывает, что приблизиться к верхней границе диапазона для q_5 можно, рассматривая пятиугольники, аналогичные тому, что изображен на рисунке 4. Считая длинные стороны и длинные диагонали приблизительно равными, и пренебрегая короткими сторонами и короткой диагональю, получим значение q_5 , примерно равное 2.

Подобраться к нижней границе диапазона можно, рассматривая пятиугольники, у которых четыре вершины расположены близко друг к другу, а пятая удалена (рис 5.). При допущениях, аналогичных предыдущим, получим значения q_5 , близкие к 1.

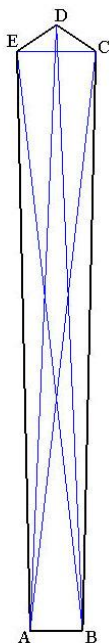


Рис. 4

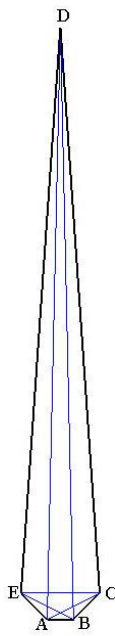


Рис. 5

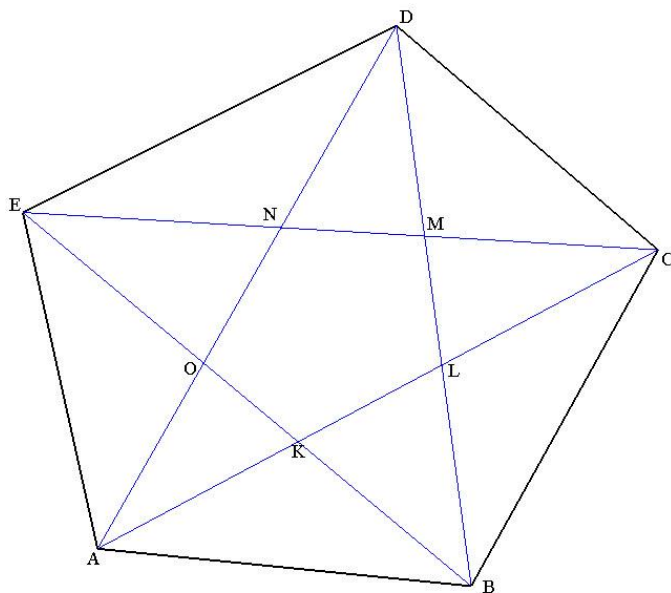


Рис. 6.

Может показаться, что реализация второй части плана уж точно будет на много сложнее, чем для четырехугольников. Достаточно посмотреть на рисунок 6 и убедиться, насколько больше на нем треугольников, чем на рисунке 3. Тем удивительнее, что требуемое доказательство проходит практически так же, как и в случае четырехугольников: $AB + BC > AC$; $BC + CD > BD$; $CD + DE > CE$; $DE + AE > AD$; $AE + AB > BE$.

Просуммировав эти неравенства, получаем $2P > S$, т.е. $q_5 < 2$.

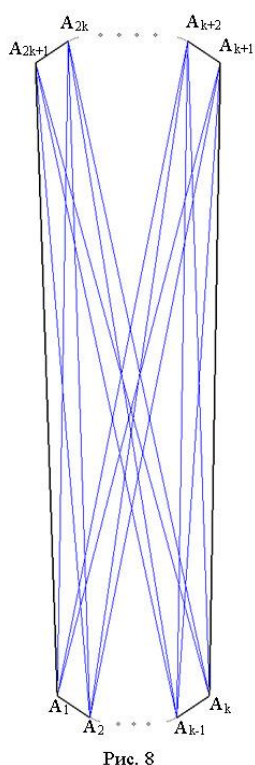
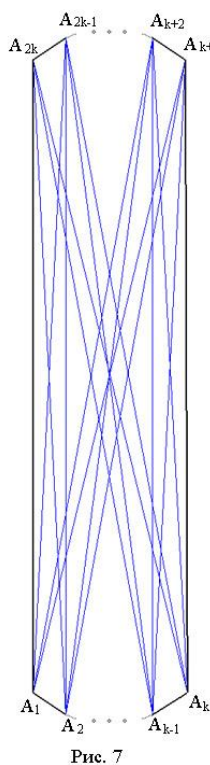
Далее: $AK + BK > AB$; $BL + CL > BC$; $CM + DM > CD$; $DN + EN > DE$; $EO + AO > AE$.
Откуда, учитывая соотношение $AK + CL < AC$ и еще четыре подобных неравенства, мгновенно получаем $S > P$. Но это значит, $q_5 > 1$, что и требовалось.

Но позвольте! Что-то здесь не так! Парой абзацев выше мы убедились, что P и S могут быть сколь угодно близки, а теперь мы доказали, что S не просто больше P , сумма диагоналей больше периметра пятиугольника $ABCDE$ более, чем на периметр пятиугольника $KLMNO$! Недоразумение проясняется, если посмотреть на аналог пятиугольника $KLMNO$ на рисунке 5. При отдалении одной из вершин от остальных периметр внутреннего пятиугольника сам становится сколь угодно мал по сравнению с периметром $ABCDE$. Поэтому никакого противоречия не возникает.

Теперь мы готовы перейти к общему случаю. Причем на вооружении у нас не только изложенный выше план, но и гипотеза о том, как именно деформировать многоугольник, чтобы получать значения q_n как можно более близкие к границам диапазона его изменения.

Для того чтобы значение q_n получилось как можно меньше, будем удалять одну из вершин n -угольника от остальных. Стороны и диагонали, исходящие из этой вершины будем называть «длинными», а остальные стороны и диагонали - «короткими». Ясно, что q_n можно сделать сколь угодно близким отношению числа длинных диагоналей к числу длинных сторон или, что то же самое, половине числа длинных диагоналей. Поскольку из каждой вершины выпуклого n -угольника выходит ровно $n-3$ диагонали, в качестве гипотетической нижней границы q_n можно взять число $\frac{n-3}{2}$.

С верхней границей дело обстоит несколько сложнее. Рассмотрение случаев $n=4$ и $n=5$ наводит на мысль, что для увеличения q_n вершины многоугольника следует разделить на две по возможности равные группы и расположить вершины внутри групп близко друг к другу, а сами группы далеко друг от друга. Но это означает, что нам придется отдельно рассмотреть два случая, в зависимости от четности n .



Пусть сначала $n=2k$ (рис.7). Посчитаем длинные диагонали. Ровно один из концов каждой длинной диагонали лежит в группе вершин $A_1, A_2, \dots, A_k$. Из вершин A_1 и A_k выходит по $k-1$ длинных диагоналей, а из остальных $k-2$ вершин - по k длинных диагоналей. Итого, имеем $2(k-1) + (k-2)k = k^2 - 2$ длинных диагоналей. Возвращаясь к n и деля на 2 (количество длинных сторон), получим, что отношение q_n можно сделать сколь угодно близким к числу $\frac{n^2-8}{8}$.

Теперь положим $n=2k+1$ (рис. 8). В этом случае из вершин A_1 и A_k выходит по k длинных диагоналей, а из остальных $k-2$ вершин первой группы - по $k+1$ длинных диагоналей. Всего длинных диагоналей будет $2k + (k-2)(k+1) = k^2 + k - 2$. Подставляя $\frac{n-1}{2}$

вместо k , получим для q_n предельное значение $\frac{n^2-9}{8}$.

Итак, гипотетический интервал для отношения суммы длин диагоналей n -угольника к его периметру для четных n – $\left(\frac{n-3}{2}; \frac{n^2-8}{8}\right)$, а для нечетных n – $\left(\frac{n-3}{2}; \frac{n^2-9}{8}\right)$.

Прежде чем доказать справедливость наших гипотез, проверим их для частных случаев. Разумеется, такая проверка не может заменить доказательство: формула, справедливая для частного случая, не обязана быть верной для общего. Зато такая проверка может сэкономить массу времени. Если формула не верна уже в простейших частных случаях, следует оглянуться назад и подумать, что мы не учли при выводе, а не тратить время на напрасные поиски доказательства.

В нашем случае частные значения для q_n при $n=4$ и $n=5$ согласуются с полученными обобщениями. Дополнительным подтверждением правильности наших выводов может служить подстановка $n=3$. В этом случае оба граничных значения интервала для нечетных n обращаются в нуль, что вполне согласуется со здравым смыслом.

Для дальнейших выкладок нам будут полезны несколько новых обозначений. Будем называть i -диагональю диагональ, соединяющую вершины, между которыми расположено i промежуточных вершин (разумеется, из двух возможных альтернатив выбирается меньшее значение i). Через S_i обозначим сумму длин всех i -диагоналей.

Очевидно, что при $n=2k+1$ в многоугольнике имеется по n i -диагоналей для каждого i из множества $\{1, 2, \dots, k-1\}$. При $n=2k$ множество допустимых значений i останется прежним, но для $i=k-1$ будет всего k диагоналей.

На рисунке 9 в качестве «типичного представителя» многоугольников с нечетным числом сторон изображен девятиугольник (автор полагает, что изображение с разрывами и многоточиями будет не слишком наглядным). Однако рассуждения мы будем вести для многоугольника с числом сторон равным $2k+1$.

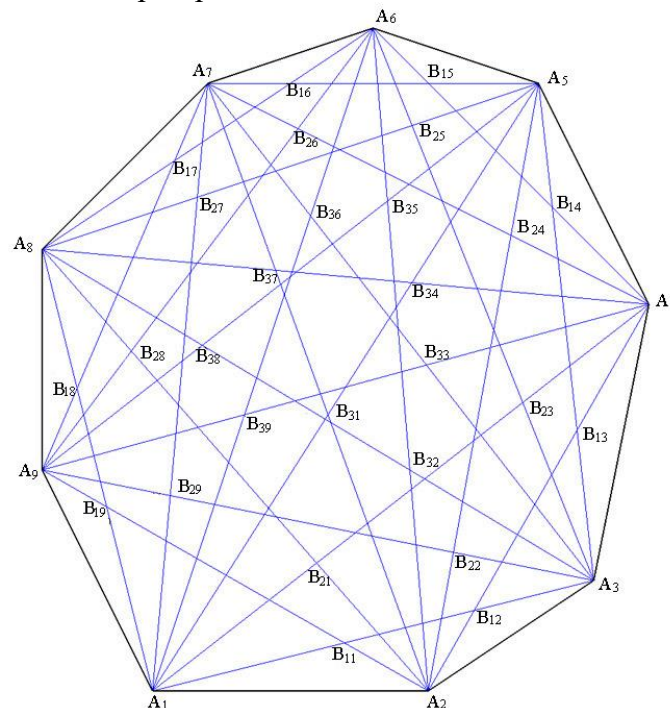


Рис. 9

Складывая неравенства $A_1A_2 + A_2A_3 > A_1A_3, \dots, A_1A_n + A_1A_2 > A_2A_n$, получим $2P > S_1$.

Далее, из неравенств $A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 > A_1A_4, \dots, A_1A_n + A_1A_2 + A_2A_3 > A_3A_n$ следует соотношение $3P > S_2$.

.....
Из $A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_{k-1}A_k > A_1A_k, \dots, A_1A_n + A_1A_2 + \dots + A_{k-2}A_{k-1} > A_{k-1}A_n$ следует, что $(k-1)P > S_{k-2}$.

Наконец, $A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_kA_{k+1} > A_1A_{k+1}, \dots, A_1A_n + A_1A_2 + \dots + A_{k-1}A_k > A_kA_n$ влечет соотношение $kP > S_{k-1}$.

Просуммировав неравенства для всех S_i , получим $(2+3+\dots+k)P > S$. Осталось применить формулу суммы арифметической прогрессии $\frac{(k+2)(k-1)}{2}P = \frac{k^2+k-2}{2}P > S$.

Ну а то, что последнее соотношение равносильно неравенству $q_n < \frac{n^2-9}{8}$, мы уже знаем.

Для получения нижней границы q_n рассмотрим неравенства:

$$A_1B_{11} + A_2B_{11} > A_1A_2, A_2B_{12} + A_3B_{12} > A_2A_3, \dots, A_nB_{1n} + A_1B_{1n} > A_1A_n;$$

$$A_1B_{21} + A_2B_{21} > A_1A_2, A_2B_{22} + A_3B_{22} > A_2A_3, \dots, A_nB_{2n} + A_1B_{2n} > A_1A_n;$$

.....

$$A_1B_{k-2,1} + A_2B_{k-2,1} > A_1A_2, A_2B_{k-2,2} + A_3B_{k-2,2} > A_2A_3, \dots, A_nB_{k-2,n} + A_1B_{k-2,n} > A_1A_n;$$

$$A_1B_{k-1,1} + A_2B_{k-1,1} > A_1A_2, A_2B_{k-1,2} + A_3B_{k-1,2} > A_2A_3, \dots, A_nB_{k-1,n} + A_1B_{k-1,n} > A_1A_n.$$

Для каждой диагонали в данных неравенствах участвует по два отрезка, дающих в сумме лишь часть этой диагонали. Поэтому, просуммировав все неравенства, получим в левой части число заведомо меньшее S . Поскольку каждая сторона участвует $k-1$ неравенствах, в левой части после суммирования получим $(k-1)P$. Поделив на P , и

выразив k через n , придем к требуемому соотношению $q_n > \frac{n-3}{2}$.

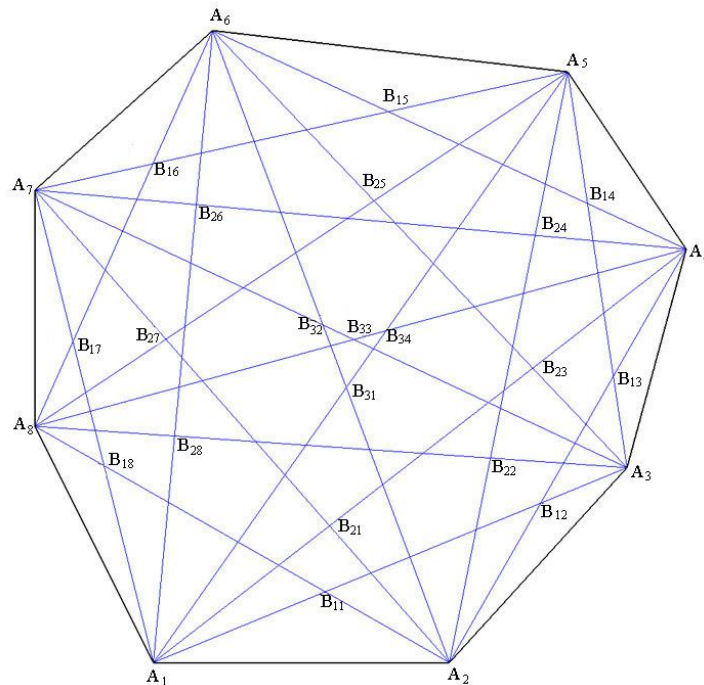


Рис. 10

Пусть теперь $n = 2k$. Многоугольник, иллюстрирующий этот случай (при $n = 8$) изображен на рисунке 10.

Суммируя стороны по две, по три и т.д., и сравнивая с соответствующими диагоналями, получим оценки, аналогичные случаю нечетного n :

$2P > S_1, 3P > S_2, \dots, (k-1)P > S_{k-2}$. Однако для S_{k-1} ситуация будет несколько иная.

Каждая $k-1$ - диагональ, то есть диагональ, соединяющая противоположные вершины, будет участвовать сразу в двух неравенствах. Так, для диагонали A_1A_{k+1} это неравенства $A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_kA_{k+1} > A_1A_{k+1}$ и $A_{k+1}A_{k+2} + A_{k+2}A_{k+3} + \dots + A_1A_{2k+1} > A_1A_{k+1}$

Сложив все такие неравенства, придем к соотношению $kP > 2S_{k-1}$ или $\frac{k}{2}P > S_{k-1}$.

Просуммировав по всем типам диагоналей получим

$$\left(2 + 3 + \dots + (k-1) + \frac{k}{2}\right)P = \left(\frac{(k+1)(k-2)}{2} + \frac{k}{2}\right)P = \frac{k^2-2}{2}P > S, \text{ что, как известно,}$$

$$\text{равносильно } q_n < \frac{n^2-8}{8}.$$

При обосновании нижней границы для q_n неравенства для участков i -диагоналей для всех i , меньших $k-1$, будут полностью идентичны тем, что рассмотрены для случая нечетного n . Складывая эти неравенства получим соотношение $S_1 + S_2 + \dots + S_{k-2} > (k-2)P$.

Остается учесть неравенства, в которых участвуют отрезки $k-1$ -диагоналей: $A_1B_{k-1,1} + A_2B_{k-1,1} > A_1A_2$, $A_2B_{k-1,2} + A_3B_{k-1,2} > A_2A_3$, ..., $A_kB_{k-1,k} + A_{k+1}B_{k-1,k} > A_kA_{k+1}$, $A_{k+1}B_{k-1,1} + A_{k+2}B_{k-1,1} > A_{k+1}A_{k+2}$, ..., $A_nB_{k-1,k} + A_1B_{k-1,k} > A_1A_n$.

И вновь существенное отличие этой ситуации от случая нечетного n заключается в том, что каждая $k-1$ -диагональ участвует в неравенствах дважды². Складывая эти неравенства получим оценку $2S_{k-1} > P$ или $S_{k-1} > \frac{P}{2}$. Складывая последнее неравенство с итоговым

$$\text{неравенством для остальных диагоналей, получим нужную оценку } S > \left(k - \frac{3}{2}\right)P = \frac{n-3}{2}P.$$

Какие наблюдения и выводы можно сделать на основании полученных результатов? Видно, что границы для q_n растут с ростом n . Но это можно было предвидеть и без наших выкладок: ведь с ростом числа сторон число диагоналей растет опережающими темпами. Но теперь мы можем заметить, что верхняя граница, имеющая квадратичную зависимость от n , растет намного быстрее нижней, зависящей от n линейно. Поэтому не только граничные значения, но и длина допустимого интервала для q_n быстро растут с ростом n . Например, для одиннадцатиугольника длина интервала допустимых значений будет в 20 раз больше, чем для четырехугольника. А насколько равномерно распределены многоугольники по допустимому интервалу? Какой участок диапазона «населен наиболее густо»? Где сосредоточены «средние многоугольники»? Ответить на эти вопросы непросто. В первую очередь из-за того, что непросто разумно формализовать понятие «средний многоугольник». Зато мы можем найти значение q_n для правильных многоугольников. Для квадрата исследуемое отношение равно $\frac{\sqrt{2}}{2}$, т.е. среднему геометрическому между

² Другое, менее важное для нас отличие состоит в том, что участки $k-1$ -диагоналей складываются в целые диагонали.

границами диапазона. Оказывается, это единственный случай, q_n для правильных многоугольников расположено ближе к нижней границы допустимого интервала. Уже для правильного пятиугольника наше отношение будет ближе к двойке, чем к единице, а именно $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Те, кому это число показалось знакомым, не ошиблись. Это знаменитое «золотое сечение».

Не очень сложно вывести и общую формулу, выражающую отношение суммы длин диагоналей правильного n -угольника к его периметру (обозначим его через Q_n). Читатели могут проделать этот вывод самостоятельно. Для этого понадобится совсем немного знаний из тригонометрии. При этом, как обычно, случаи четного и нечетного n опять будут немного отличаться. Если объединить их в одной формуле, то ответ будет таким ($\lfloor n/2 \rfloor$ означает наибольшее целое число, не превосходящее $n/2$):

$$Q_n = \frac{-\frac{1+(-1)^n}{4} + \sum_{k=2}^{\lfloor n/2 \rfloor} \sin \frac{\pi k}{n}}{\sin \frac{\pi}{n}}$$

С ростом n отношение Q_n к верхней границе диапазона для q_n будет расти. Но это не значит, Q_n будет «прижиматься» к этой границе. Можно показать, что при устремлении n к бесконечности это отношение будет стремиться к числу $\frac{8}{\pi^2}$.

Вопросы для самостоятельного исследования

- Сколько сторон может иметь выпуклый многоугольник, для которого $q_n = 7$?
- Существуют ли другие (отличные от рассмотренных) многоугольники, для которых q_n можно сделать сколь угодно близким к границам интервала допустимых значений?
- Как изменится диапазон допустимых значений q_n , если снять ограничение выпуклости многоугольника?

Литература

1. D. E. Mitrinović, J. E. Pečarić, V. Volonec, Recent Advances at Geometric Inequalities. – CLUWER ACADEMIC PUBLISHERS, 1989, p. 419.
2. В. Ф. Лев, М846, Задачник «Кванта», Квант 1984, №7, с. 53.
3. Школьные олимпиады. Международные математические олимпиады / Сост. А. А. Фомин, Г. М. Кузнецова. – М.: Дрофа, 1998, с. 11.