**ММ229.** Петя нарисовал на доске несколько прямых общего положения так, что все попарные точки пересечения прямых попали на чертёж.

Вася выписал себе в тетрадь внешний цикл возникшей конфигурации: (1, 4, 3, 1, 4, 1, 2, 2, 3, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 4, 2, 1, 3).

После этого Петя стёр рисунок. Сможет ли Вася восстановить:

1) количество прямых;

2) количество элементарных многоугольников;

3) количество выпуклых вершин;

4) количество элементарных отрезков, ограничивающих внешний контур;

5) количество сторон выпуклой оболочки внешнего контура;

6) суммарное число сторон элементарных многоугольников;

7) количество обратных вершин;

8) количество впадин;

9) количество сторон внешнего контура?

Примечание: Вася — умный.

**Решение.**

**1) Количество прямых.** Граница каждой внешней области содержит два луча, уходящих на бесконечность. Каждый такой луч принадлежит границе двух внешних областей. Поэтому число внешних областей равно числу лучей. Но каждая прямая содержит два луча, уходящих на бесконечность в разные стороны, поэтому количество прямых в два раза меньше количества внешних областей. Поскольку во внешнем цикле 20 элементов, то количество внешних областей 20, поэтому количество прямых 10.

**2) Количество элементарных многоугольников.** Известно, что $n$ прямых общего положения делят плоскость на $\frac{n\left(n+1\right)}{2}+1$ частей (доказательство см. тут: [https://deoma-cmd.ru/files/sets/Geometry/Математическая%20индукция.pdf](https://deoma-cmd.ru/files/sets/Geometry/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B0%D1%8F%20%D0%B8%D0%BD%D0%B4%D1%83%D0%BA%D1%86%D0%B8%D1%8F.pdf)). Десять прямых общего положения делят плоскость на 56 частей. Но 20 частей — это внешние области, а оставшиеся 36 — это элементарные многоугольники.

**3) Количество выпуклых вершин.** Если внешняя область имеет только одну вершину, то эта вершина является выпуклой вершиной внешнего контура. И наоборот, каждой выпуклой вершине внешнего контура соответствует внешняя область с одной вершиной. Поскольку таких внешних областей 6, то и выпуклых вершин 6.

**4) Количество элементарных отрезков, ограничивающих внешний контур.** Каждая внешняя область с $n$ вершинами содержит $n-1$ элементарных отрезков, ограничивающих внешний контур, поэтому из внешнего цикла находим количество элементарных отрезков: 25.

**5) Количество сторон выпуклой оболочки внешнего контура.** Не знаю. ☹ Думаю, что не сможет. На рисунке, приведенном в качестве примера перед задачей, выпуклая оболочка внешнего контура является треугольником ACJ. Но если слегка повернуть одну прямую, не нарушая конфигурацию, то вершина E уедет вправо, и выпуклая оболочка внешнего контура превратится в четырехугольник ACEJ. Я предполагаю, что подобная ситуация будет и для конфигурации прямых, указанной в задаче. Но чтобы это доказать, надо нарисовать пример такой конфигурации, что мне не удалось сделать.

**6) Суммарное число сторон элементарных многоугольников.** Сначала найдём общее количество элементарных отрезков. Каждая из 10 прямых пересекается с 9 остальными прямыми, которые отсекают на ней 8 отрезков и два луча. Значит, всего у нас 80 элементарных отрезков. Из них 25 отрезков принадлежат внешнему контуру (см. пункт 4), и каждый из этих отрезков является стороной ровно одного элементарного многоугольника. Остальные 55 элементарных отрезков не принадлежат внешнему контуру, и каждый из таких отрезков является стороной ровно двух элементарных многоугольников. Поэтому суммарное число сторон элементарных многоугольников равно 25+55·2=135.

**7) Количество обратных вершин.** Если внешняя область имеет единственную вершину, то эта вершина является выпуклой. Если внешняя область имеет ровно две вершины, то каждая из них либо выпуклая, либо вообще не является вершиной внешнего контура (она просто лежит на его стороне). Если же внешняя область имеет $n$ вершин, где $n\geq 3$, то из них $n-2$ вершины обратные. Тогда из внешнего цикла находим количество обратных вершин: 11.

**8) Количество впадин.** Если на участке внешнего контура между двумя соседними выпуклыми вершинами (которые принадлежат внешним областям с единственными вершинами) есть хотя бы одна обратная вершина (которая принадлежит внешней области с тремя или более вершинами), то этот участок является впадиной. Тогда из внешнего цикла находим количество впадин: 6.

**9) Количество сторон внешнего контура.** Количество сторон внешнего контура равно количеству его вершин, которое равно сумме количества выпуклых и обратных вершин, т.е. 6+11=17.