ММ222. *На доске написано 10 попарно различных натуральных чисел. После того как 5 из этих чисел разделили на 5, а другие 5 умножили на 5, возникли 10 попарно различных натуральных чисел, отличных от исходных. При этом сумма новых чисел оказалась в 3 раза больше суммы исходных. Пусть n – наименьшее возможное значение наибольшего из исходных чисел, для которых возможна описанная ситуация. Сколько существует различных наборов исходных чисел с наибольшим числом $n+1$?*

Ответ: 129.

Решение. Обозначим те исходные числа, которые потом делят на 5, через x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, а те, которые умножают на 5, — через y_1, y_2, y_3, y_4, y_5.

Сначала найдём n.

Числа x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 должны делиться на 5. Но пять наименьших натуральных чисел, делящихся на 5, — это 5, 10, 15, 20 и 25. Однако числа 5 и 25 не могут присутствовать в исходном наборе одновременно, поскольку после деления числа 25 на 5 получается 5, а должно получаться число, отличное от исходных. Значит, число n никак не может быть меньше 30.

Покажем, что n может быть равно 30. Пусть $x_1 = 5$, $x_2 = 10$, $x_3 = 15$, $x_4 = 20$, $x_5 = 30$. После деления на 5 получим 1, 2, 3, 4, 6. Найдём числа y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, удовлетворяющие условиям задачи и не превосходящие 30. Обозначим

$$S_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5, \quad S_2 = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5.$$

Поскольку по условию задачи

$$\frac{S_1}{5} + 5S_2 = 3(S_1 + S_2),$$

то

$$S_2 = \frac{7}{5}S_1. \tag{1}$$

Для выбранных значений $x_1 = 5$, $x_2 = 10$, $x_3 = 15$, $x_4 = 20$, $x_5 = 30$ получим $S_2 = 112$. Значит, нам нужно представить число 112 в виде суммы пяти попарно различных натуральных чисел, не превосходящих 30 и отличных от 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 15, 20, 30. Например, $112 = 7 + 21 + 27 + 28 + 29$. Таким образом, $y_1 = 7$, $y_2 = 21$, $y_3 = 27$, $y_4 = 28$, $y_5 = 29$. Исходный набор чисел 5, 10, 15, 20, 30, 7, 21, 27, 28, 29 удовлетворяет всем условиям задачи, причём наибольшее из них равно 30.

Итак, доказано, что $n = 30$.

Найдём все допустимые исходные наборы чисел с наибольшим числом $n + 1 = 31$.

Среди чисел, делящихся на 5, по-прежнему должны присутствовать числа 10, 15, 20, 30 и либо 5, либо 25. Предположим, что $x_1 = 10$, $x_2 = 15$, $x_3 = 20$, $x_4 = 25$, $x_5 = 30$. После деления на 5 получим 2, 3, 4, 5, 6. Из уравнения (1) получим $S_2 = 140$. Наибольшее из исходных чисел должно быть равно 31, пусть это y_1. Чтобы найти числа y_2, y_3, y_4, y_5, нам нужно представить число $140 - 31 = 109$ в виде суммы четырёх попарно различных натуральных чисел, не превосходящих 31 и отличных от 2, 3, 4, 5, 6, 10, 15, 20, 25, 30, 31. Но это невозможно, потому что если все четыре слагаемых больше 25, то их сумма равна $29+28+27+26 = 110$, а если хотя бы одно из четырёх слагаемых меньше 25, то их сумма не превосходит $29 + 28 + 27 + 24 = 108$.

Теперь предположим, что $x_1 = 5$, $x_2 = 10$, $x_3 = 15$, $x_4 = 20$, $x_5 = 30$. После деления на 5 получим 1, 2, 3, 4, 6. Как показано выше, при этом $S_2 = 112$. Пусть $y_1 = 31$. Чтобы найти числа y_2, y_3, y_4, y_5, нам нужно представить число $112 - 31 = 81$ в виде суммы четырёх попарно различных натуральных чисел, не превосходящих 31 и отличных от 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 15, 20, 30, 31. Перечислим все такие представления, упорядочив слагаемые по возрастанию:

$7+17+28+29$	$9+21+22+29$	$12+17+24+28$	$14+16+22+29$
$7+18+27+29$	$9+21+23+28$	$12+17+25+27$	$14+16+23+28$
$7+19+26+29$	$9+21+24+27$	$12+18+22+29$	$14+16+24+27$
$7+19+27+28$	$9+21+25+26$	$12+18+23+28$	$14+16+25+26$
$7+21+24+29$	$9+22+23+27$	$12+18+24+27$	$14+17+21+29$
$7+21+25+28$	$9+22+24+26$	$12+18+25+26$	$14+17+22+28$
$7+21+26+27$	$9+23+24+25$	$12+19+21+29$	$14+17+23+27$
$7+22+23+29$	$11+13+28+29$	$12+19+22+28$	$14+17+24+26$
$7+22+24+28$	$11+14+27+29$	$12+19+23+27$	$14+18+21+28$
$7+22+25+27$	$11+16+25+29$	$12+19+24+26$	$14+18+22+27$
$7+23+24+27$	$11+16+26+28$	$12+21+22+26$	$14+18+23+26$
$7+23+25+26$	$11+17+24+29$	$12+21+23+25$	$14+18+24+25$
$8+16+28+29$	$11+17+25+28$	$12+22+23+24$	$14+19+21+27$
$8+17+27+29$	$11+17+26+27$	$13+14+25+29$	$14+19+22+26$
$8+18+26+29$	$11+18+23+29$	$13+14+26+28$	$14+19+23+25$
$8+18+27+28$	$11+18+24+28$	$13+16+23+29$	$14+21+22+24$
$8+19+25+29$	$11+18+25+27$	$13+16+24+28$	$16+17+19+29$
$8+19+26+28$	$11+19+22+29$	$13+16+25+27$	$16+17+21+27$
$8+21+23+29$	$11+19+23+28$	$13+17+22+29$	$16+17+22+26$
$8+21+24+28$	$11+19+24+27$	$13+17+23+28$	$16+17+23+25$
$8+21+25+27$	$11+19+25+26$	$13+17+24+27$	$16+18+19+28$
$8+22+23+28$	$11+21+22+27$	$13+17+25+26$	$16+18+21+26$
$8+22+24+27$	$11+21+23+26$	$13+18+21+29$	$16+18+22+25$
$8+22+25+26$	$11+21+24+25$	$13+18+22+28$	$16+18+23+24$
$8+23+24+26$	$11+22+23+25$	$13+18+23+27$	$16+19+21+25$
$9+16+27+29$	$12+13+27+29$	$13+18+24+26$	$16+19+22+24$
$9+17+26+29$	$12+14+26+29$	$13+19+21+28$	$17+18+19+27$
$9+17+27+28$	$12+14+27+28$	$13+19+22+27$	$17+18+21+25$
$9+18+25+29$	$12+16+24+29$	$13+19+23+26$	$17+18+22+24$
$9+18+26+28$	$12+16+25+28$	$13+19+24+25$	$17+19+21+24$
$9+19+24+29$	$12+16+26+27$	$13+21+22+25$	$17+19+22+23$
$9+19+25+28$	$12+17+23+29$	$13+21+23+24$	$18+19+21+23$
$9+19+26+27$			

Всего 129 вариантов. Значит, всего есть 129 исходных наборов чисел с наибольшим числом 31.