Задача ММ257 сюжетно связана с ММ237.

**ММ257** (9 баллов) Решения принимаются до 18.10.2020

**Студент математического факультета Вася Пупкин пропустил (по уважительной причине) занятие по дискретной математике. Однокурсники рассказали, что на занятии рассматривался некий граф. Но ни один из них не зафиксировал этот граф ни с помощью гаджетов, ни на бумагу. Впрочем, Васины однокурсники, утверждают, что это не страшно, поскольку они и так помнят этот граф. В подтверждение своих слов они наперебой кинулись вспоминать характеристики графа:**

**Аня: В графе было ровно 3 связных компоненты.**

**Ваня: Причем во всех связных компонентах графа имелись циклы.**

**Даня: А еще среди связных компонент не было изоморфных.**

**Маня: Число ребер в одной из компонент было равно половине общего числа ребер.**

**Саня: При этом число ребер было равно сумме количеств вершин и связных компонент.**

**Таня: В графе была всего одна вершина степени 3.**

**Зина: А всего в графе было не более 13 вершин.**

**Лина: И при этом не было висячих вершин.**

**Нина: А степень одной из вершин не менее чем на 2 превосходила степень каждой из остальных вершин.**

**Фаина: Зина, Лина и Нина правы.**

**Услышавший эти реплики преподаватель сказал, что память подвела ровно одного человека. Сможет ли Вася (умница и отличник) однозначно восстановить граф?**

Ответ: Да, может, существует только такой граф (он на первом рисунке в решении).

Решение: З, Л и Н все правы, потому что если хотя бы одно из них не права, то не права и Ф, а это противоречит утверждению преподавателя.

*Случай 1: Не права Т, а остальные правы.*

Тогда, в графе 3 связные компоненты (по А), не более 16 ребер (по С, А, З), в большей компоненте не более 8 ребер (по М). В каждой из двух меньших компонент не меньше, чем по 3 ребра (по В).

Случай 1.1. Если обе меньшие компоненты содержат по 3 ребра, то они обе - циклы длины 3, что невозможно по Д.

Случай 1.2. Если в одной из меньших компонент 3 ребра, а в другой 4 ребра, то они являются циклами длины 3 и 4. Третья компонента содержит 7 ребер и вершину степени не меньше 4, то есть всего не меньше 5 вершин, а тогда всего вершин в таком графе не меньше 12, и С не прав.

Случай 1.3. Если в меньших по числу ребер компонентах суммарно не меньше 8 вершин, то и ребер в них суммарно не меньше 8. Тогда в третьей компоненте не более 5 вершин, одна из которых тогда должна иметь степень 4, а остальные – по 2. Но тогда такая компонента содержит не более 6 ребер, то есть меньше половины, и М не прав.

Случай 1.4. Остается случай, когда суммарно в двух меньших компонентах 7 вершин, но 8 ребер. Это возможно только если одна из них – цикл длины 3, а вторая – полный граф из 4 вершин без одного из ребер. Тогда в третьей компоненте должна иметься вершина степени не меньше 5, то есть в третьей компоненте 6 всего 6 вершин, и в этом случае существует единственный граф, при котором правы все, кроме Т:



*Случай 2: Т права.*

Тогда в графе есть одна вершина степени 3, и, по Н, существует вершина степени не меньше 5, тогда в компоненте связности, в которой находится эта вершина, не меньше 6 вершин, а поскольку среди них нет висячих, то в этой компоненте не меньше 8 ребер.

Случай 2.1 Если в этой компоненте 8 ребер, то это компонента определяется однозначно с учетом Л:



То есть в этой компоненте находится и вершина наибольшей степени 5, и единственная вершина степени 3. Значит, все остальные вершины графа имеют степень не больше 2, а поскольку вершин степени 1 по Л нет, то все остальные вершины либо изолированные вершины, либо имеют степень 2. Всего остальных вершин не более 7, и значит при указанном ограничении на их степени, ребер в оставшейся части графа тоже не более 7. Значит, М заведомо неправ, то есть правы все остальные. Но тогда изолированных вершин, по В, в графе нет, две оставшиеся (по А) компоненты связности – циклы, и тогда эти компонентами связности могут быть только циклы длины 3 и 4. Но тогда в графе 15 ребер, 3 компоненты связности и 13 вершин, и С тоже не прав, вместе с М, противоречие.

Случай 2.2. Если же в компоненте, содержащей вершину наибольшей степени, есть по крайней мере 9 ребер, то с учетом верности Т, Л и Н, в этой компоненте не может быть меньше 7 вершин. В оставшихся компонентах связности тогда не более 6 вершин. Поскольку висячих вершин (по Л) нет, то 6 вершин могут разбиваться (с учетом того, что из А, В и Д не более одного ложного утверждения):

- либо на 2 компоненты с 1 и 5 вершинами (и тогда В не прав),

- либо на 1 компоненту с 6 вершинами (и тогда, А не прав),

- либо на 2 цикла длины 3 (и тогда Д не прав).

Но во всех этих трех случаях легко проверяется, что М и С не могут быть правы одновременно, противоречие.