216)

Как вообще выглядят числа, имеющие ровно n натуральных делителей? Мы раскладываем n в произведение нескольких множителей, вычитаем из каждого по 1, воводим различные простые в полученные степени и перемножаем. Очевидно, выгодно взять первые несколько простых (если одно из первых простых не взято - заменим на него последнее взятое) и сделать так, чтобы последовательность степеней не возрастала(иначе будет выгодно поменять местами два показателя степени). Но вот выбор наименьшего из таких чисел, хоть и конечный в каждом конкретном случае, уже не очень приятен.

Кроме того, мы будем использовать оценки распределения простых чисел $\frac{n}{2\ln n} < \pi(n) < \frac{2n}{\ln n}$ при $n > 2$.

а) Пусть $n = p_1p_2\dots p_k$. Тогда наименьшее число с таким числом делителей это $p_1^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_k^{a_k}$ (следующие простые уже незачем использовать, n нельзя разложить в произведение более чем k множителей) причем $(a_1+1)(a_2+1)\dots(a_k+1) = p_1p_2\dots p_k$ и $a_1 \ge a_2 \ge \dots \ge a_n$.

Допустим, что одно из простых там не встретилось. Тогда одно из простых в разложении будет не в степени $p_i - 1$, а в какой-то другой. Возьмем последнее число в степени не такого вида. Пусть это p, а q - одно из следующих простых чисел. Итак, имеется $p^{ab-1}q^{c-1}$. Попробуем заменить это на $p^{ac-1}q^{b-1}$ и выясним, когда эта замена эффективна. В частности, возможно $c = 1$. Но $a, b > 1$. Также мы знаем, что $c \le ab$.

$p^{ab-1}q^{c-1} > p^{ac-1}q^{b-1}$

$p^{ab}q^c > p^{ac}q^b$

$p^{a(b-c)} > q^{b-c}$

Если $b > c$, то это равносильно $p^a > q$, аналогично можно заменить, если $p^b > q$. Будем теперь считать, что $a > b > 1$. В частности, $a \ge 3$

Итак, если $b > c$ и $p^a > q$ или $a > c$ и $p^b > q$, то есть способ улучшить число.

Поскольку $p^a > q$ по крайней мере для нескольких следующих простых чисел q после p, то для их степеней верно $c > a$.

Итак, у всех простых чисел в промежутке от p до p^a степень - некоторое число вида $p_i - 1$, причем $p_i > a$, но $p_i < ab < a^2$ и все эти степени разные. То есть простых чисел от p до p^a меньше чем простых чисел от a до a^2. Докажем, что так обычно не бывает. Будем усиливать требуемое неравенство.

$\pi(p^a) - \pi(p) > \pi(a^2) - \pi(a)$

$\pi(p^a) > a^2 + p$

$\frac{p^a}{2a\ln p} > a^2 + p$

$p^a > 2a^3p^2 + 2ap^2$

$p^{a-1} > 3a^3$

$2^{a-1} > 3a^3$ что верно при $a \ge 17$.

Итак, если одна из степеней имеет вид $ab-1$, где $a \ge 17, b \ne 1$, то число всегда можно уменьшить. Таким образом, только числа от 2 до 13 могут группироваться между собой. В частности это значит, что все простые, кроме последних пяти, будут реально задействованы в оптимальном примере.

Теперь попробуем разобрать случаи маленьких a (опять же усиливая по дороге неравенство).

1) $a = 13$.

$\pi(p^{13}) - \pi(p) > \pi(169) - \pi(13) = 34$

$\frac{p^{13}}{13\ln p} \ge p + 33$. Поскольку $p^4 > 13$

$p^8 > p + 33$

$p(p^7 - 1) > 33$

$2(2^7 - 1) > 33$ верно

2) $a = 11$.

$\pi(p^{11}) - \pi(p) > \pi(121) - \pi(11) = 25$

$\frac{p^{11}}{11\ln p} \ge p + 25$. Поскольку $p^4 > 11$

$p^6 > p + 25$

$p(p^5 - 1) > 25$

$2(2^5 - 1) > 25$ верно

3) $a = 7$.

$\pi(p^7) - \pi(p) > \pi(49) - \pi(7) = 11$

$\frac{p^7}{7\ln p} \ge p + 11$. Поскольку $p^3 > 7$

$p^3 > p + 25$

$p(p^2 - 1) > 25$

$5(5^2 - 1) > 25$ верно. Осталось проверить $p = 2, 3$.

$\pi(2^7) - \pi(2) = 29 > 11$
$\pi(3^7) - \pi(3) \geq \pi(2^7) - \pi(3) = 28 > 11$
4) $a = 5$.
$\pi(p^5) - \pi(p) > \pi(25) - \pi(5) = 6$
$\frac{p^5}{5 \ln p} \geq p + 6$. Поскольку $p^2 > 5$ при $p \neq 2$
$p^2 > p + 6$ верно при $p > 3$.
Осталось проверить $p = 2, 3$.
$\pi(2^5) - \pi(2) = 10 > 6$
$\pi(3^5) - \pi(3) \geq \pi(2^5) - \pi(3) = 9 > 6$
5) $a = 3$.
$\pi(p^3) - \pi(p) > \pi(9) - \pi(3) = 2$
$\frac{p^3}{3 \ln p} \geq p + 2$. Поскольку $p > 5$ (остальные смотрим позже) имеем $3 \ln p < p$
$p^2 > p + 2$ верно при $p > 5$.
Осталось проверить $p = 2, 3, 5$.
$\pi(2^3) - \pi(2) = 3 > 2$
$\pi(3^3) - \pi(3) = 7 > 2$
$\pi(5^3) - \pi(5) \geq \pi(3^3) - \pi(5) = 6 > 2$
Итак, на самом деле указанное неравенство верно всегда. Поэтому никакую степень вида $ab - 1$ нет смысла держать.
б) Докажем, что например $N = 64!$ не будет красивым. Оно имеет 145 простых множителей, поэтому $p_{146} = 839$ не будет использовано для построения минимального числа с N делителями. В то же время оно кратно 2^{63}, поэтому если для построения минимального числа двойка будет взята в меньшей степени, то делимости не будет. Докажем, что так и случится. Допустим, в разложение наименьшего числа входит 2^k, причем $k \geq 63$. Тогда $k + 1$ - делитель числа N, не меньший 64 и поэтому не простой. Допустим $k = ab - 1$.
Утверждение. Любое составное число, большее 64, можно разложить на два множителя так, что один из них будет не меньше 11, а второй больше 1.
В самом деле, если у числа есть простой множитель, больший 7, утверждение очевидно. Если есть простой множитель, меньший 7 - поделим число на него и получим минимум $13 = \frac{65}{5}$. Если же число - степень семерки, то оно как минимум 343 и его можно записать в виде $7b$, где $b \geq 7^2 = 49 > 11$.
Заменим тогда в нашем числе 2^{ab-1} (где $a \geq 11$) на $2^{a-1} 839^{b-1}$ и докажем, что число уменьшится (количество делителей, естественно, не изменится).
$2^{ab-1} \geq 2^{a-1} 839^{b-1}$
$2^{ab-a} \geq 839^{b-1}$ $(2^a)^{b-1} \geq 839^{b-1}$
$2^a \geq 839$
Что верно, поскольку $2^a \geq 2^{11} = 2048 > 839$.
Видимо, можно провести похожее рассуждение для любого числа $N = t!$, если только степень вхождения двойки в $t!$ больше всех простых чисел до t включительно хотя бы на 2 (это довольно частая ситуация, естественно. Скажем для степеней двойки надо только в число Мерсенна не вмазаться случайно).
(Например, для $N = 7! = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ наименьшим, кажется, будет $2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$ и я вообще подозреваю, что при больших t это условие необходимо и достаточно, потому что какое-то простое должно быть в степени,кратной $p - 1$ и интуитивно ясно, что для больших простых выгодно эти степени держать индивидуально. Например, для того же 64! начало оптимального числа должно быть $2^{60} \cdot 3^{58} \cdot 5^{52} \ldots$, поэтому делиться на факториал (кроме двоек), где степени убывают куда быстрее, оно будет. Но это я пока не смог формализовать.)
Итак, пусть t достаточно велико и обладает этим свойством. Тогда $N = t!$ делится на каждое простое p в степени не большей $\frac{t}{p} + \frac{t}{p^2} + \ldots = \frac{t}{p-1}$, поэтому общее количество простых в разложении не превысит $t(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{t-1}) < t(\ln t + 1)$. Следовательно простое с номером $[2t \ln t]$ наверняка использовано не будет. Оно при этом меньше чем $2 \cdot 2t \ln(t) \cdot \ln(2t \ln(t) < 8t \ln^2 t$.
В минимальное число двойка должна входить в степени не ниже чем $p{+}1$ для любого p из делителей N. Значит, она входит туда в непростой степени $ab - 1$, где $a, b > 1$. То есть в степени не ниже чем $\frac{t}{2 \ln t}$ (можно оценить максимальное простое, не превосходящее t). Тогда в любом разложении ab на множители найдется множитель, больший $\sqrt{\frac{t}{2 \ln t}}$. Назовем именно его a и докажем, что соответствующая замена будет выгодна. Действуем аналогично рассуждению про 64. Надо будет в итоге доказать неравенство
$2^{\sqrt{\frac{t}{2 \ln t}}} > 8t \ln^2 t$

$\sqrt{\frac{t}{2\ln t}}\ln 2 > \ln(8t\ln^2 t)$
$\sqrt{\frac{t}{2\ln t}} > 2\ln(t^2)$
$\frac{t}{2\ln t} > 16\ln^2 t$
$t > 32\ln^3 t$
Что верно при больших t.
в) Докажем, что таких чисел бесконечно много. Рассмотрим число вида $(p_{6k+1}p_{6k+2}\dots p_{7k})^7$ при k большем 100 и докажем, что оно подходит. А именно - наилучшим числом со стольками делителями будет произведением первых $7k$ простых чисел, каждое из которых (в частности последние k) входит в степени $p_i - 1$, $6k+1 \le i \le 7k$, и этого достаточно для делимости ибо $p_i - 1 \ge p_{6k+1} - 1 \ge p_7 - 1 = 16 > 7$
В самом деле, допустим что это не так и одно из простых входит в степени $ab-1$. Тогда другое простое не входит вовсе. Заменим p^{ab-1} на $p^{a-1}q^{b-1}$ и докажем, что число уменьшилось.
$p^{ab-1} > p^{a-1}q^{b-1}$
$p^{ab-a} > q^{b-1}$
$p^a > q$
Докажем что $2^{p_{6k+1}} > p_{7k}$, этого будет достаточно. Как обычно, усиливаем неравенство.
$p_{6k+1}\ln 2 > \ln p_{7k}$
$\frac{(6k+1)\ln(6k+1)\ln 2}{2} > \ln(2\cdot 7k\cdot\ln(7k))$
$\frac{6k}{4} > \ln(98k^2)$
$k > 3\ln k$
Что верно при $k > 100$ из-за возрастания функции $\frac{k}{\ln k}$.
На самом деле, вероятно, исходное неравенство верно и при мелких k (скажем, просто число 17^7 отлично подходит), но в этом пункте я все равно не готов понимать, как выглядят все такие числа.
г) очевидно, что $7^1, 7^2, 7^3$ не являются красивыми (число 7 в разложении использовано не будет). Столь же очевидно, что $7^4, 7^5, 7^6$ красивыми будут. Докажем, что остальные степени семерки красивыми не будут, то есть ответ 3. Возьмем число 7^k. Для получения числа со стольками делителями может быть использовано не более чем k первых простых чисел. Будем считать, что использованы ровно k, просто некоторые в нулевой степени.
Рассмотрим число $2^{7^{a_1}-1}3^{7^{a_2}-1}\dots p_k^{7^{a_k}-1}$. Мы хотим сделать его как можно меньше. Умножим его на $2\cdot 3\cdot\ldots\cdot p_k$, возьмем логарифм и будем минимизировать уже это число - $7^{a_1}\ln 2 + \ldots + 7^{a_k}\ln p_k$. Как мы уже знаем, последовательность a_i невозрастает.
Лемма. Если $a > 7b$, то $a + b > \frac{a}{7} + 7b$ (очевидно после приведения подобных и умножения на $\frac{7}{6}$).
Разобьем теперь все простые числа на промежутки от 7 до 7^7, от 7^7 до 7^49 и так далее. Оценим количество простых чисел на каждом из этих промежутков.
$\pi(7^{7^n}) - \pi(7^{7^{n-1}}) > \frac{7^{7^n}}{7^n\ln 7} - 7^{7^{n-1}} > \frac{7^{7^n}}{2\cdot 7^n\ln 7} > 7^{7^n-n-1} \ge 7(7^n - n - 1) > 7(7^n - 7^{n-1})$
В каждом из этих промежутков есть как минимум $7\cdot 6, 7\cdot 42, \ldots 7\cdot(7^n - 7^{n-1})$ простых чисел. В первом промежутке указать 42 простых числа можно, дальше асимптотика и последнее неравенство точно работают.
Утверждение. a_i на участке от 7^{7^n} до $7^{7^{n+1}}$ это как минимум $a_4 - n - 1$.
В самом деле, пусть для какого-то p это не так. То есть $a_i \le a_4 - n - 2$. Заметим что $\ln p_i < \ln(7^{7^{n+1}}) = 7^{n+1}\ln 7$. Тогда $7^{a_4}ln7 > 7\cdot 7^{a_i}\ln p_i$ и в силу леммы тогда $7^{a_4}ln7 + 7^{a_i}\ln p_i > 7^{a_4-1}ln7 + 7^{a_i+1}\ln p_i$ - противоречие с минимальностью числа.
Обозначим a_4 за x. Тогда сумма показателей при простых это как минимум $7(7-1)(x-1) + 7(7^2 - 7)(x-2) + \ldots 7(7^{x-1} - 7^{x-2})\cdot 1 + 4x$ (последнее слагаемое показывает степени $2, 3, 5, 7$ по минимуму). Упростим эту сумму: $7^x + 7^{x-1} + \ldots + 7^2 - 7(x-1) + 4x \ge 7^x + 7^{x-1} + 7 - 3x > 7^x$ при $x \ge 2$. Следовательно, сумма показателей степеней (равная k) больше, чем 7^{a_4} и наше число на 7^k не делится.