259 Введем комплексные координаты - пусть вершины треугольника, вписанного в единичную окружность, это $1, a^2, b^2$, а середины дуг между ними - $a, b, -ab$ (К сожалению ab - середина не той дуги). Тогда центр описанной окружности это 0, точка пересечения медиан $\frac{1}{3}(1+a^2+b^2)$, центр вписанной - ортоцентр треугольника с вершинами в серединах дуг описанной окружности, то есть $a+b-ab$.

а) Как известно, площадь треугольника в комплексных координатах это $\pm\frac{i}{4}\begin{vmatrix} a & \overline{a} & 1 \\ b & \overline{b} & 1 \\ c & \overline{c} & 1 \end{vmatrix}$ (знак выбирается из ориентации). Если взять площади двух наших треугольников и вычесть друг из друга - мы получим непрерывную вещественнозначную функцию трех комплексных переменных. Остается лишь доказать, что она может принимать значения разных знаков. Для этого докажем, что площадь каждого из треугольников может быть примерно равна нулю при площади другого отделенной от нуля - этого будет достаточно (дальше перетянем один треугольник в другой, сдвигая вершины по окружности)

У равностороннего треугольника все описанные точки совпадают, а его площадь не 0

Теперь пусть $a \approx b$. Тогда $\begin{vmatrix} a^2 & \overline{a^2} & 1 \\ b^2 & \overline{b^2} & 1 \\ 1 & \overline{1} & 1 \end{vmatrix} \approx 0$, а второй определитель примерно равен

$\begin{vmatrix} \frac{1}{3}(2a^2+1) & \frac{1}{3}\overline{2a^2+1} & 1 \\ 2a-a^2 & \overline{2a-a^2} & 1 \\ 0 & \overline{0} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}(2a^2+1)\frac{2a-1}{a^2} - \frac{1}{3}(2a-a^2)\frac{2+a^2}{a^2} = \frac{(a+1)^3(a-1)}{3a^2}$ что отделено от 0 например при $a=i$

б) Допустим, что это возможно. Будем считать, что вершина 0 соответствует вершине 1 исходного треугольника (в противном случае повернем исходный треугольник по окружности, при этом все точки, в том числе O повернутся вокруг нуля). Пусть треугольники ориентированы одинаково. Тогда для подобия необходимо и достаточно, чтобы

$\frac{\frac{1}{3}(a^2+b^2+1)}{a+b-ab} = \frac{a^2-1}{b^2-1}$

То есть $(a^2+b^2+1)(b^2-1) = 3(a^2-1)(a+b-ab)$

Взяв сопряженные от обеих частей и домножив на a^3b^4, получим

$(b^2+a^2+a^2b^2)(1-b^2)a = 3(1-a^2)(a+b-1)b^3$

Раскрывая скобки, получим систему двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} a^3(3b^3-b^2+1)+3a^2b^3(b-1)-a(b^4+3*b^3-1)+3b^3(1-b)=0 \\ -a^3(b^4-3b^3-1)+3a^2b^3(b-1)-ab^2(b^2+3b-1)+3b^3(1-b)=0 \end{cases}$$

Вычисляя результант этих двух многочленов, получим

$b^{24}-9b^{23}+34b^{22}-60b^{21}+143b^{20}-93b^{19}-151b^{18}+384b^{17}-519b^{16}+141b^{15}+261b^{14}-363b^{13}+462b^{12}-363b^{11}+261b^{10}+141b^{9}-519b^{8}+384b^{7}-151b^{6}-93b^{5}+143b^{4}-60b^{3}+34b^{2}-9b+1=0$

Этот многочлен кратен $(b+1)^4(b-1)^4(b^2-b+1)$, но соответствующие корни нас не устраивают (в первых двух случаях вершина b^2 совпадет с 1, а при $b=\frac{1}{2}\pm\frac{i\sqrt{3}}{2}$ получается правильный треугольник, у которого все интересные точки совпадают и треугольника не образуют вовсе.

После деления получим $b^{14}-8b^{13}+29b^{12}-59b^{11}+201b^{10}-163b^{9}+417b^{8}-188b^{7}+417b^{6}-163b^{5}+201b^{4}-59b^{3}+29b^{2}-8b+1$

Заметим, что этот многочлен симметричен, поэтому выгодно будет поделить его на b^7 и ввести новую переменную $b+\frac{1}{b}=x$. Отметим, что принадлежность b единичной окружности равносильна тому. что x - вещественное и лежит на $[-2;2]$.

После замены получим уравнение $x^7-8x^6+22x^5-11x^4+70x^3+x^2-48x+36=0$

Если $x\in[-2;-1]$, то $22x^5+70x^3+x^2-48x+36 = (x^3+x^2)+48(x^3-x)+21(x^3+1)+15(x^5+1)+7x^5<0$, а прочие слагаемые отрицательны.

Если $x\in[1;2]$, то $x^7-8x^6+22x^5-11x^4+70x^3+x^2-48x+36 = (x^7-x^6)+11(x^5-x^4)+7(8x^3-x^6)+14x^3+x^2+11x^5-48x+36 \geq 14x^3+x^2+11x^5-48x+36 \geq 26x^2-48x+36 > 24x^2-48x+24 = 24(x-1)^2 \geq 0$

Если $x\in[0;1]$, то $x^7-8x^6+22x^5-11x^4+70x^3+x^2-48x+36 = 8(x^5-x^6)+11(x^3-x^4)+x^7+22x^5+70x^3+x^2-48x+36 \geq 70x^3+x^2-48x+36$. Если $x<\frac{3}{4}$, то это не меньше $70x^3+x^2>0$. Если $x\geq\frac{3}{4}$, то это не меньше $70\cdot\frac{9}{16}x+\frac{3}{4}x-48x+36 > 35x-48x+36 = 36-13x>0$

Если $x\in[-\frac{2}{3};0]$, то $x^7-8x^6+22x^5-11x^4+70x^3+x^2-48x+36 \geq -1-1-\frac{22\cdot32}{243}-\frac{11\cdot16}{27}-\frac{70\cdot8}{27}+36 > -1-1-3-7-21+36>0$

Наконец, при $x \in [-1; -\frac{2}{3}]$ возьмем производную
$7x^6 - 48x^5 + 110x^4 - 210x^3 + 2x - 48 \geq -210x^3 - 50 \geq \frac{210 \cdot 8}{27} - 50 > 0$
Поэтому на этом промежутке есть не более одного корня. Один корень есть, поскольку для $F(x) = x^7 - 8x^6 + 22x^5 - 11x^4 + 70x^3 + x^2 - 48x + 36$ имеем $F(-1) <, F(0) > 0$, так что где-то корень обязан быть.
Приближенные вычисления показывают, что $x \approx -0.915298$, откуда $b = \frac{x}{2} \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} i \approx -0.457649 + 0.889133i$
Осталось убедиться, что a, являющееся при этом b общим корнем двух уравнений, тоже имеет модуль 1.
Будем постепенно избавляться от a в системе, складывая уравнения, домноженные на подходящие многочлены от b. Последовательно получим
$a^2(b^6 + 3b^5 - 10b^4 + 12b^3 - b^2 + 3b + 1) + 3a(1-b)(2b^4 - b^2 - 1) + b^8 - 3b^7 - 6b^5 + 7b^4 - 6b^3 - 3b + 1 = 0$
$(a^2(b^6 + 3b^5 - 10b^4 + 12b^3 - b^2 + 3b + 1) + 3a(1-b)(2b^4 - b^2 - 1) + b^8 - 3b^7 - 6b^5 + 7b^4 - 6b^3 - 3b + 1)3(b-1)a - (3a^3(b-1) + a^2(b^2 - 3b - 1) + 3a(1-b) + b^4 + 3b - 1)(b^6 + 3b^5 - 10b^4 + 12b^3 - b^2 + 3b + 1) = 0$
$-a^2(b^8 - 2b^6 + 3b^5 - 18b^4 + 12b^3 - 25b^2 + 12b - 10) + 3a(b-1)(b^8 - 3b^7 + b^6 - 3b^5 - 3b^4 + 6b^3 - b^2 + 2) - (b^4 + 3b - 1)(b^6 + 3b^5 - 10b^4 + 12b^3 - b^2 + 3b + 1) = 0$
$(-a^2(b^8-2b^6+3b^5-18b^4+12b^3-25b^2+12b-10)+3a(b-1)(b^8-3b^7+b^6-3b^5-3b^4+6b^3-b^2+2)-(b^4+3b-1)(b^6+3b^5-10b^4+12b^3-b^2+3b+1))(b^6+3b^5-10b^4+12b^3-b^2+3b+1)+(a^2(b^6+3b^5-10b^4+12b^3-b^2+3b+1)+3a(1-b)(2b^4-b^2-1)+b^8-3b^7-6b^5+7b^4-6b^3-3b+1)(b^8-2b^6+3b^5-18b^4+12b^3-25b^2+12b-10) = 0$
$3a(b-1)^2(b^{13}+b^{12}-19b^{11}+23b^{10}-31b^9+8b^8+45b^7-72b^6+37b^5+4b^4-23b^3+28b^2-10b+8)-9b^{15}+9b^{14}+36b^{13}-207b^{12}+351b^{11}-180b^{10}-243b^9+576b^8-432b^7+81b^6+108b^5-198b^4+144b^3-72b^2+45b-9 = 0$
$a = \frac{3(b^{10}-2b^8+19b^7-25b^6+38b^5-21b^4+20b^3-6b^2+4b-1)}{b^{10}-18b^8+42b^7-91b^6+123b^5-127b^4+87b^3-54b^2+18b-8}$
Наша задача теперь - вычислить $|a|$. Сопряженное получается заменой b на $\frac{1}{b}$, после чего нам только остается доказать, что
$\frac{9(b^{10}-2b^8+19b^7-25b^6+38b^5-21b^4+20b^3-6b^2+4b-1)(b^{10}-4b^9+6b^8-20b^7+21b^6-38b^5+25b^4-19b^3+2b^2-1)}{(8b^{10}-18b^9+54b^8-87b^7+127b^6-123b^5+91b^4-42b^3+18b^2-1)(b^{10}-18b^8+42b^7-91b^6+123b^5-127b^4+87b^3-54b^2+18b-8)} = 1$
То есть $9(b^{10} - 2b^8 + 19b^7 - 25b^6 + 38b^5 - 21b^4 + 20b^3 - 6b^2 + 4b - 1)(b^{10} - 4b^9 + 6b^8 - 20b^7 + 21b^6 - 38b^5 + 25b^4 - 19b^3 + 2b^2 - 1) = (8b^{10} - 18b^9 + 54b^8 - 87b^7 + 127b^6 - 123b^5 + 91b^4 - 42b^3 + 18b^2 - 1)(b^{10} - 18b^8 + 42b^7 - 91b^6 + 123b^5 - 127b^4 + 87b^3 - 54b^2 + 18b - 8)$
Раскрывая скобки, получим $b^{20} - 18b^{19} + 126b^{18} - 510b^{17} + 1501b^{16} - 4047b^{15} + 7513b^{14} - 13455b^{13} + 17497b^{12} - 22794b^{11} + 22540b^{10} - 22794b^9 + 17497b^8 - 13455b^7 + 7513b^6 - 4047b^5 + 1501b^4 - 510b^3 + 126b^2 - 18b + 1 = 0$
Если этот многочлен делится на полученный нами многочлен 14 степени для b – мы победили. Оказывается да, делится. Получается $b^6 - 10b^5 + 17b^4 - 25b^3 + 17b^2 - 10b + 1$
Итак, это возможно для треугольника с вершинами примерно 1, $(0.703318 - 0.710876i)^2$, $(-0.457649 + 0.889133i)^2$
в) Для начала выясним коэффициент подобия треугольникв, построенных в пункте б. Вдруг это 1? Но если произвести приближенное вычисление, то получим стороны треугольников примерно $0.6, 1.78, 1.42$ и $0.26, 0.62, 0.78$ с коэффициентом подобия примерно 0.44. Это слишком далеко от 1, так что они не равны.
Отметим, что в пункте б мы полностью разобрали случай, когда треугольники были подобны и одинаково ориентированы. Пусть они ориентированы по-разному. Тогда потребуется навесить сопряжение на одну из частей равенства. Получим
$\frac{\frac{1}{3}(a^2+b^2+1)}{a+b-ab} = \overline{\frac{a^2-1}{b^2-1}}$
$\frac{\frac{1}{3}(a^2+b^2+1)}{a+b-ab} = \frac{(a^2-1)b^2}{(b^2-1)a^2}$

То есть $(a^2+b^2+1)(b^2-1)a^2=3(a^2-1)(a+b-ab)b^2$
Очевидно, что эта задача ничем не отличается от предыдущей по методу решения. Поэтому лучше сразу воспользуемся wolframalpha и вычислим подходящие a и b, предложив ему решить систему $(a^2+b^2+1)(b^2-1)a^2=3(a^2-1)(a+b-ab)b^2, |a|=|b|=1$. Отметим сразу, что аналогичное уравнение для пункта б приводит к нашему же ответу, так что вольфрамовские приближенные вычисления работают корректно. Кроме того, я на всякий случай написал программку, которая перебрала точки на единичной окружности с шагом 0.000001 и вывела те, где результат был близок к 0 - оказалось, что отловлены все (я опасался либо касания соответствующей кривой с единичной окружностью, либо почти кратных корней - они может и есть, но тогда приближенно равны друг другу). Ясно, что ДОКАЗАТЬ подобие таким образом затруднительно, надо беседовать про какие-то непрерывности кривых от комплексных переменных, не хочу.
$a\approx-0.986491+0.163813i$, $b\approx 0.227889+0.973687i$
$a\approx 0.915492-0.402336i$, $b\approx 0.4067-0.913562i$.
А также сопряженные к ним. И еще как и в первом случае ±1 и случай правильного треугольника.
Будем считать длины отрезков между a^2 и b^2, а также между $a+b-ab$ и $\frac{1}{3}(a^2+b^2+1)$.
В первом случае имеем примерно 1.99 и 2.15
Во втором случае имеем примерно 1.345 и 0.998.
В обоих случаях ошибки при вычислениях были недостаточно велики, чтобы на самом деле там было равенство, а мы его упустили.
Итак, ответ - нет, а принципиально разных ситуаций с подобием всего три.