

ММ223. Рассмотрим две задачи.

1. Вася получил за четверть 5 оценок по географии. Ему удалось незаметно исправить в журнале первую из них с тройки на пятёрку. Выставляя итоговую оценку, учительница находит среднюю оценку и округляет её до целой. Какова вероятность, что Васина оценка за четверть повысится при условии, что учительница не выявит подлога, а все допустимые упорядоченные наборы оценок равновероятны?

2. Вася получил за четверть 5 оценок по географии. Ему удалось незаметно исправить в журнале первую попавшуюся из них с тройки на пятёрку. Выставляя итоговую оценку, учительница находит среднюю оценку и округляет её до целой. Какова вероятность, что Васина оценка за четверть повысится при условии, что учительница не выявит подлога, а все допустимые упорядоченные наборы оценок равновероятны?

Какое из условий выгоднее для жуликоватого Васи?

Прим.: Был ли журнал электронным — не важно. Но важно, что колы не ставим: разрешается использовать только оценки 2, 3, 4, 5.

Предполагаем, что среди выставленных оценок имеется хотя одна оценка 3. Тогда, при заданных условиях, выгоднее второй вариант. Расчёты приведены в таблице:

Набор оценок $a \in \{2, 4, 5\}$ $b \in \{2, 3, 4, 5\}$	Размещений		Вероятность повышения оценки
	Всего	«Удачных»	
3, b, b, b, b	$4^4 = 256$	103	0,4023
a, 3, b, b, b	$3 \cdot 4^3 = 192$	77	
a, a, 3, b, b	$3^2 \cdot 4^2 = 144$	58	
a, a, a, 3, b	$3^3 \cdot 4 = 108$	44	
a, a, a, a, 3	$3^4 = 81$	33	
	781	315	0,4033

Очевидно, вероятность повышения оценки за четверть из-за «нехороших» действий Васи уменьшается при увеличении количества полученных оценок:

Количество оценок	Вероятность повышения оценки	
	1-й вариант	2-й вариант
3	0,6875	0,7568
4	0,5000	0,4971
6	0,3379	0,3306
7	0,3003	0,2924
8	0,2666	0,2570
9	0,2505	0,2406

В общем случае можно приблизительно оценить вероятность увеличения округлённого значения $\left[\frac{S+\delta}{n} \right] > \left[\frac{S}{n} \right]$ для фиксированных δ и n , все числа натуральные и $\delta < n < S$. При различных S может быть n остатков от деления на n , но только δ остатков меньше $n/2$ для чётных n или $(n+1)/2$ для нечётных n . Отсюда следует оценка искомой вероятности — $\frac{\delta}{n}$.