***Задача 240 (5 баллов)***

***Ответ***: При заданном количестве треугольных граней количество пятиугольных граней может принимать любое целое неотрицательное значение, не превосходящее , за исключением . В задаче - это числа и

***Решение***:

При проведении одной прямой на действительной проективной плоскости образуется одна область. Далее, пусть уже проведено прямых, тогда при проведении -ой прямой образуется точка пересечения с уже проведенными прямыми, которые на -ой прямой высекают отрезков, которые в свою очередь, делят грань каждую на новые две. Так что количество граней увеличивается на . А всего получается граней. Получаем .

Пусть при проведении прямых на проективной плоскости образовались грани с вектором . Тогда у соответствующего графа для количества рёбер имеем . Количество точек пересечения прямых равно , и на каждой прямой лежит рёбер, поэтому

Получаем .

А также .

И в результате,

(1)

Получаем оценку

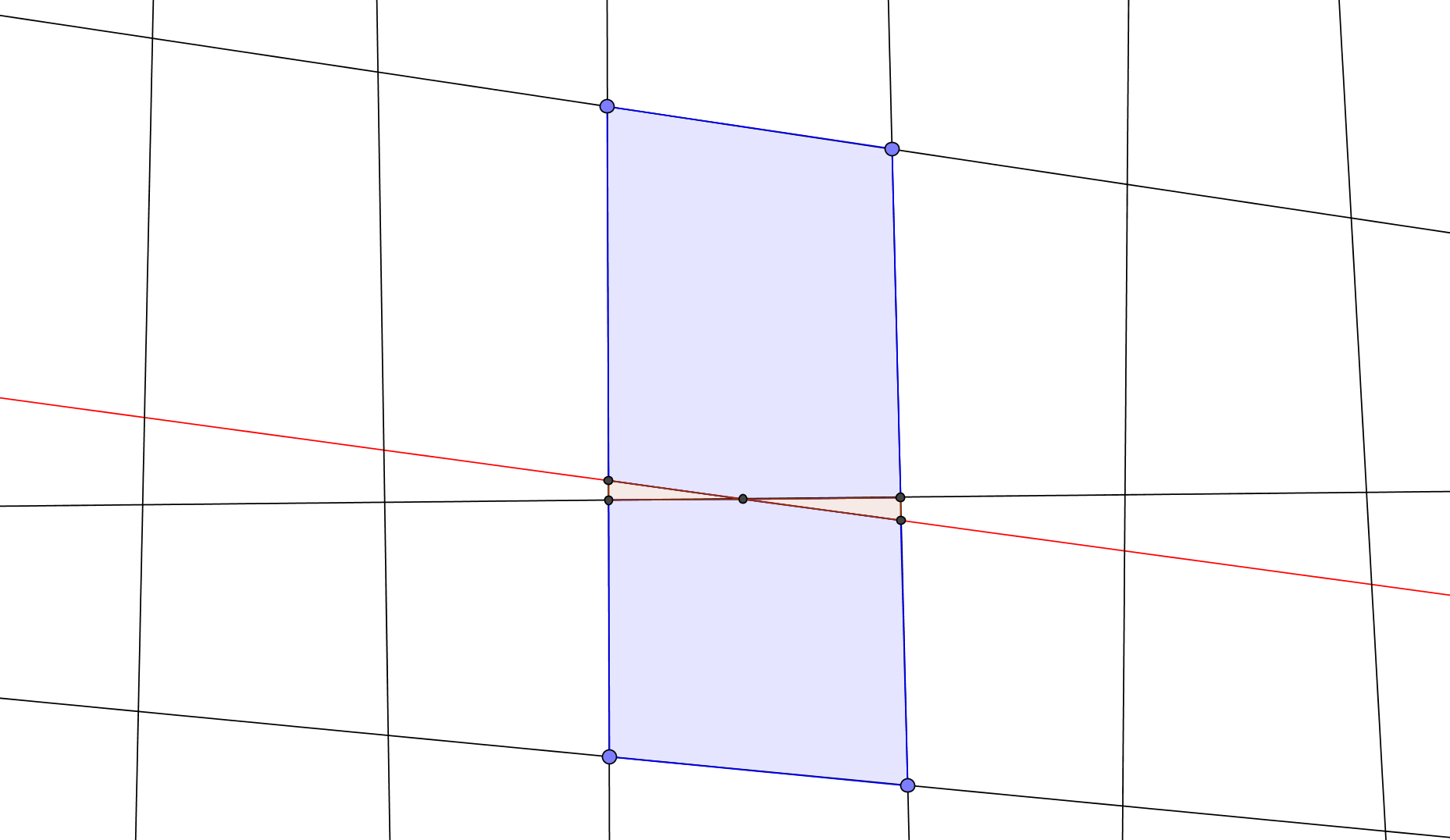
. (2)

А если , то, с учётом (1), , и тогда , поэтому , и .

Для каждой пары чисел , , удовлетворяющих полученным необходимым условиям, построим соответствующую конфигурацию прямых на действительной проективной плоскости.

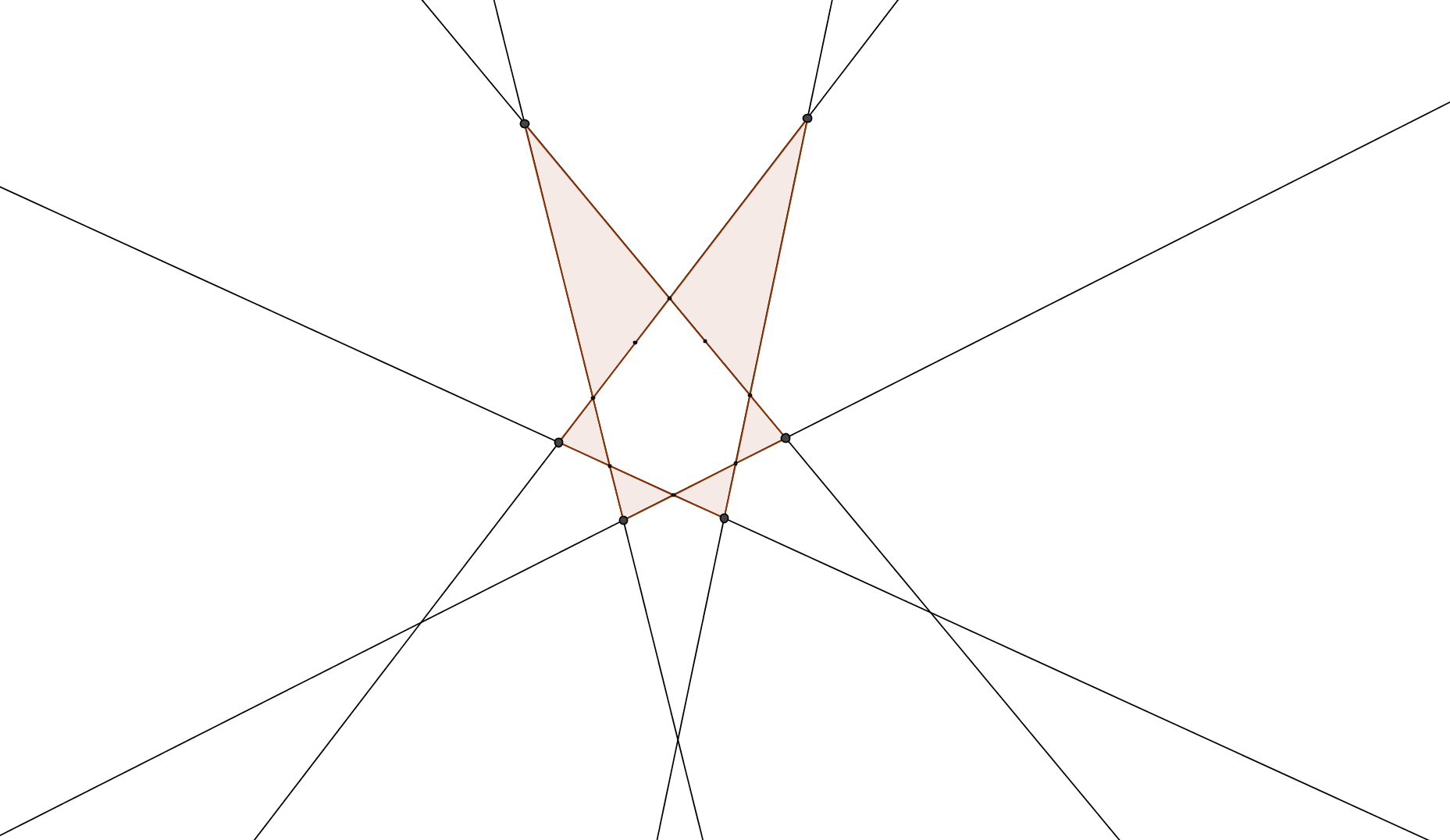
1) При рассмотрим конфигурацию из прямых, содержащих стороны выпуклого -угольника. Получим треугольных граней, одну -угольную грань и четырёхугольных граней: Возьмём две соседние по стороне четырёхугольные грани, и через точку на общей стороне проведём прямую, лишь чуть-чуть отклоняющуюся от прямой, содержащей эту сторону.

Эта прямая линия разбивает каждую из этих двух четырёхугольных граней на треугольную и пятиугольную грани. А каждую остальную грань, которую она пересекает, разбивает на четырёхугольную и другую - с тем же количеством сторон. Количество треугольных граней увеличивается на две, количество пятиугольных граней также увеличивается на две, а количество четырёхугольных увеличивается на . Получаем конфигурацию с .

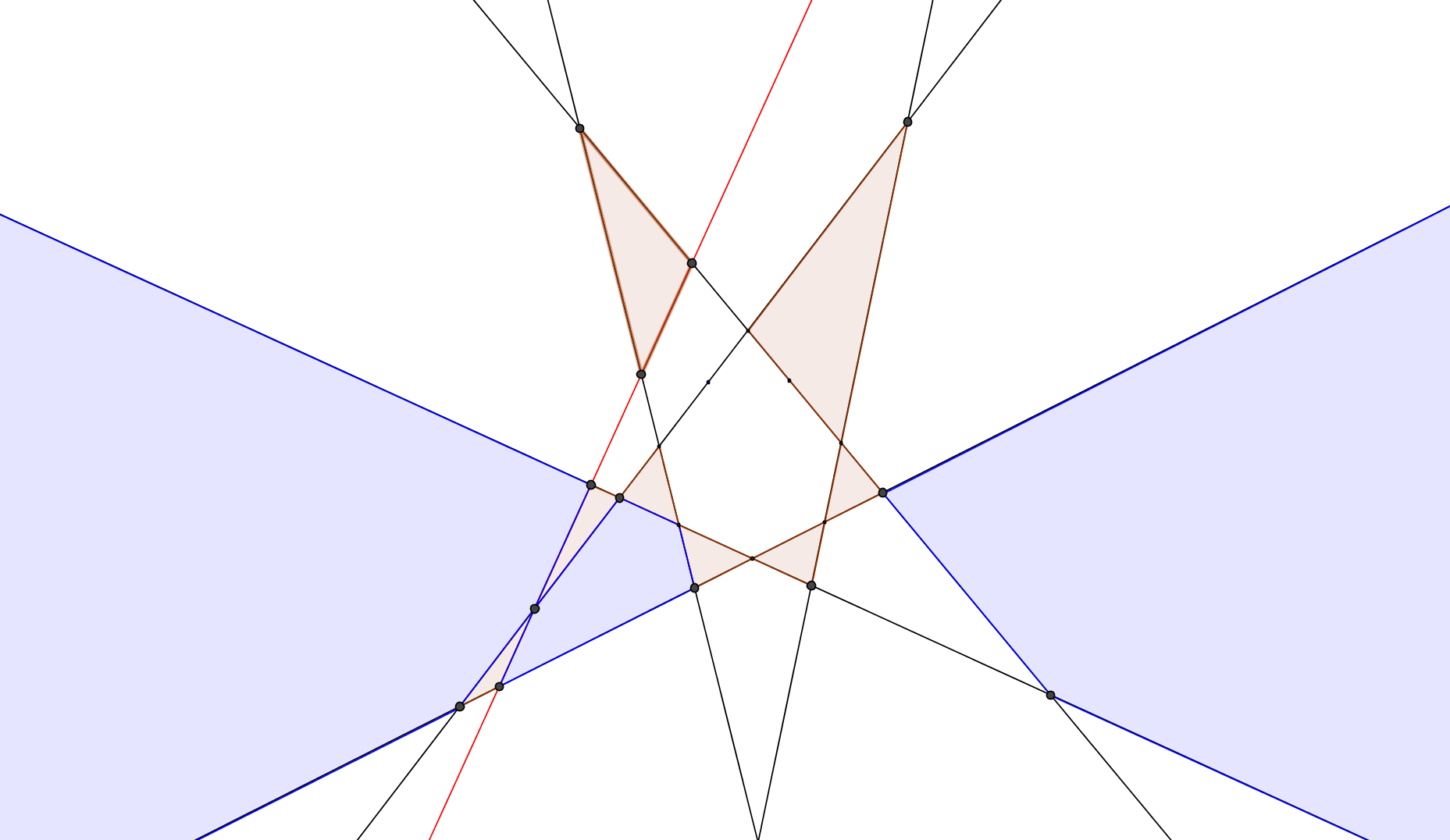


Заметим, что как до, так и после проведения прямой, имеется пара соседних четырёхугольных граней. Повторяя эту процедуру раз, получим конфигурацию с .

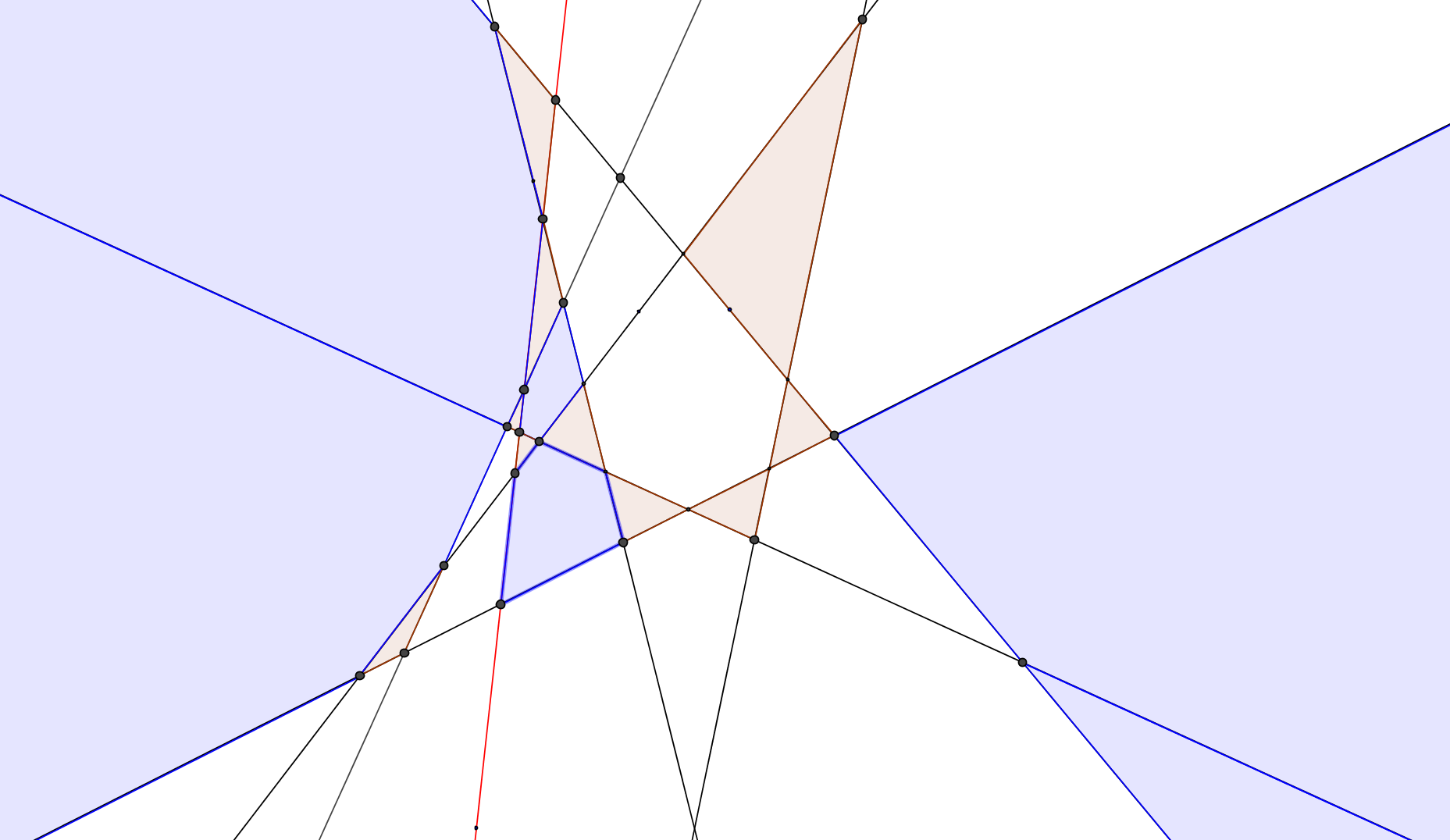
Например, при начальная конфигурация с имеет вид



При добавлении одной прямой получаем конфигурацию с

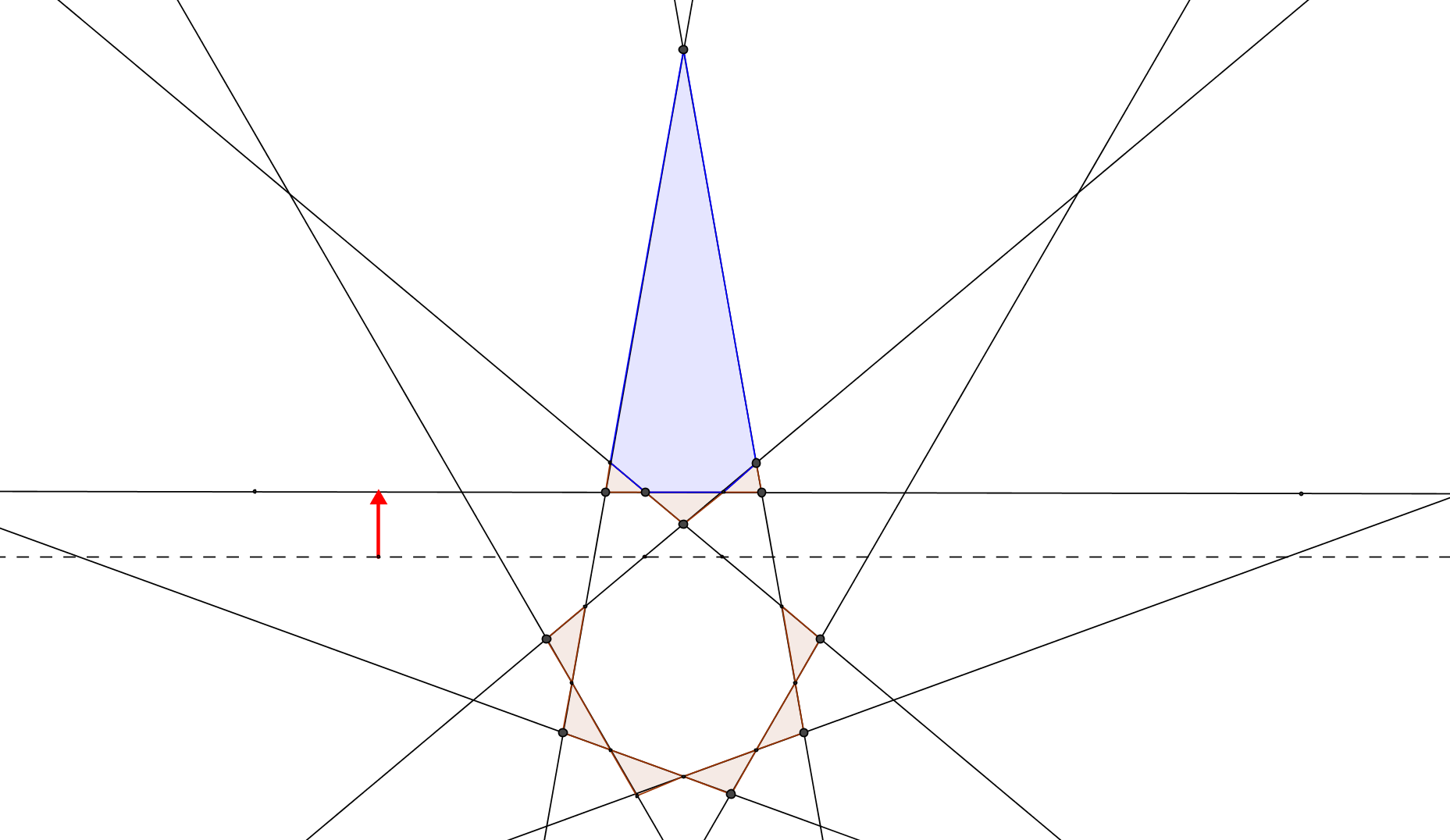


При добавлении ещё одной прямой получаем конфигурацию с :



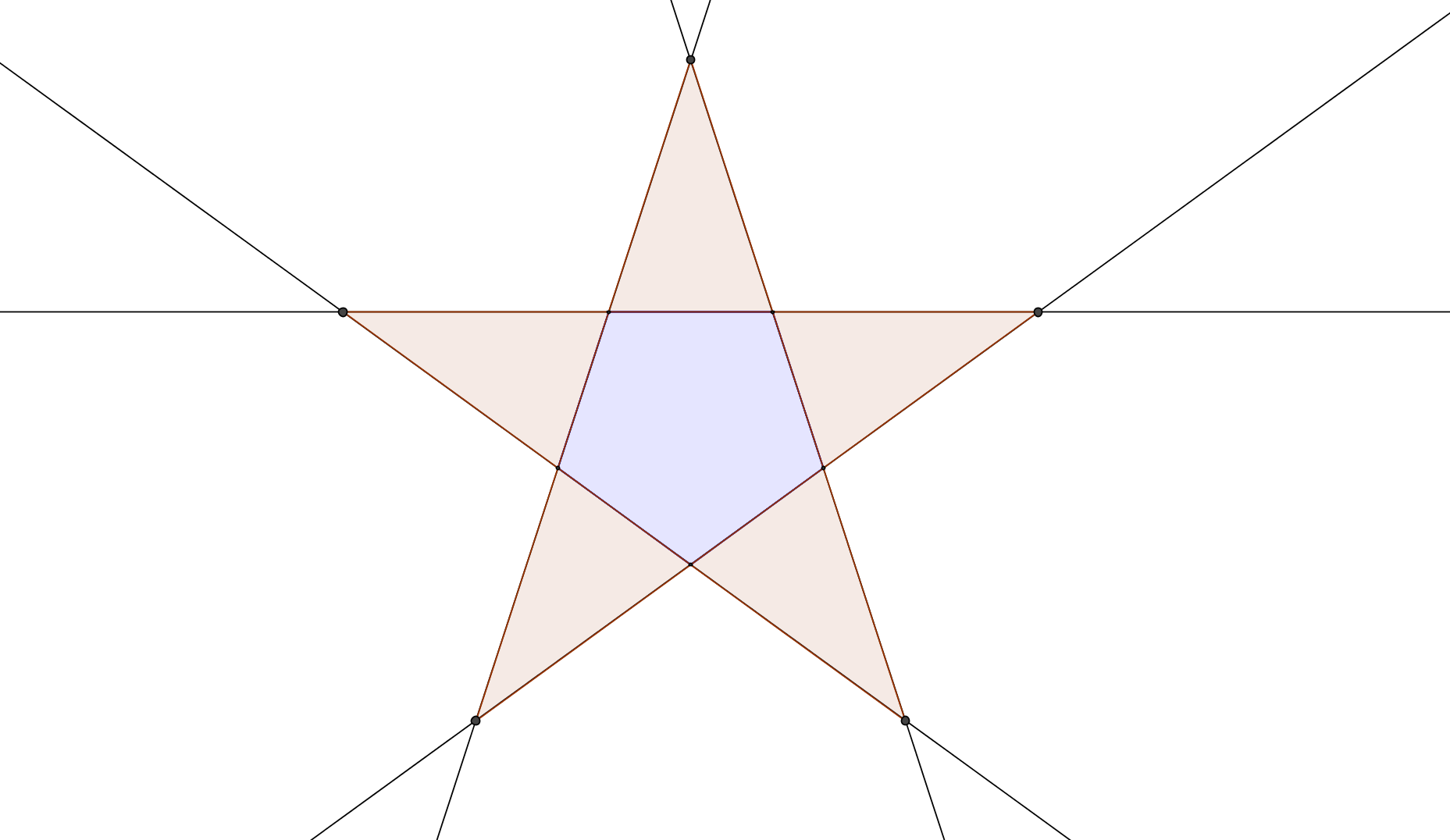
И т. д.

2) Далее, при рассмотрим конфигурацию из прямых, содержащих стороны выпуклого -угольника. Одну из прямых параллельным переносом сместим за ближайшую точку пересечения прямых, содержащих соседние к данной стороны -угольника, тогда в новой конфигурации .

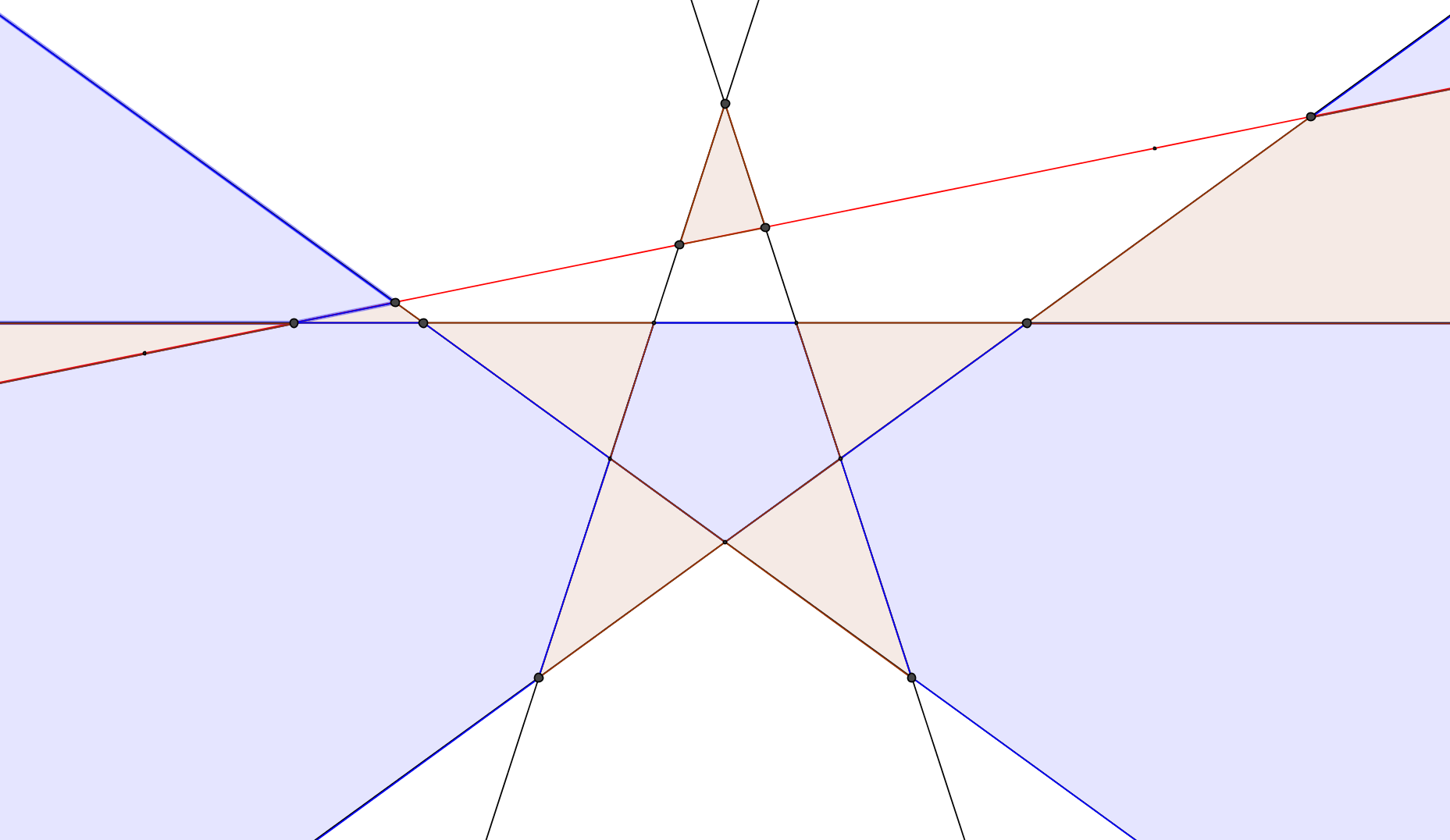
**

Повторяя описанную ранее процедуру добавления прямой раз, получим конфигурацию с .

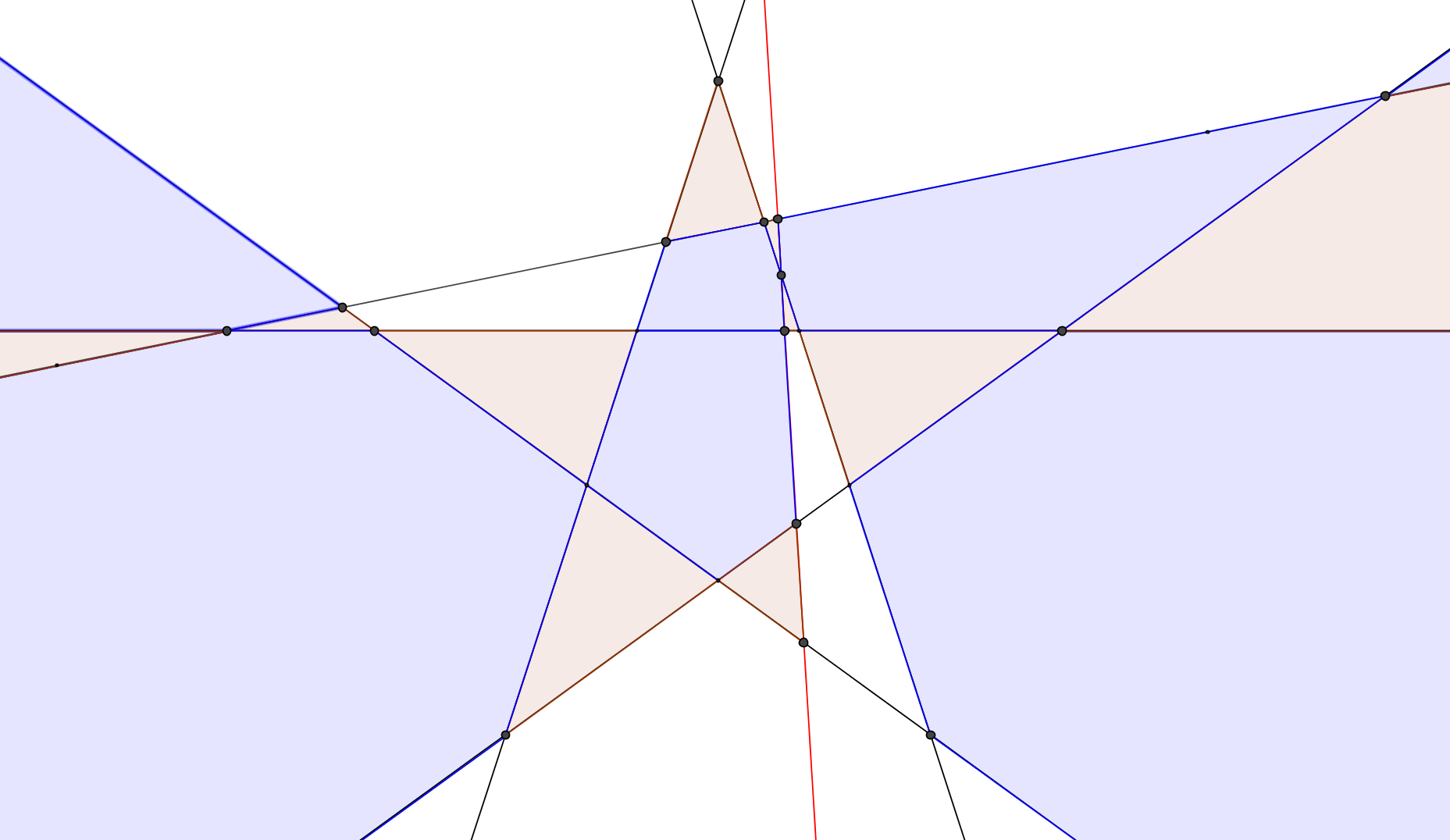
3) А теперь рассмотрим в качестве начальной конфигурацию из прямых, содержащих стороны выпуклого пятиугольника. В этом случае имеем :



При добавлении одной прямой получаем конфигурацию с



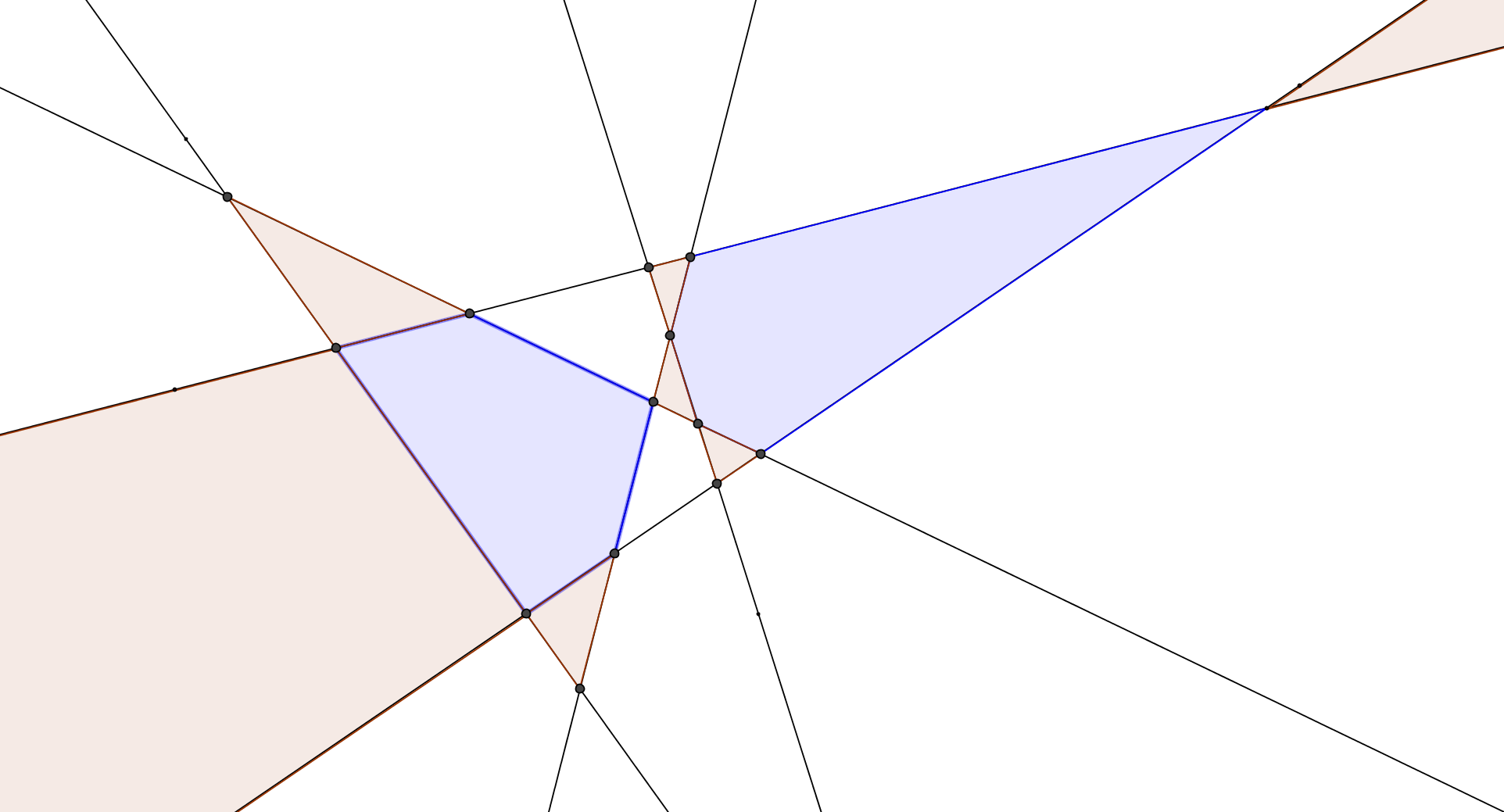
При добавлении ещё одной прямой получаем конфигурацию с :



а после повторения указанной процедуры раз получим конфигурацию с .

4) Заметим, что для конфигурации всего трёх прямых .

5) А для следующей конфигурации шести прямых :



При добавлении одной прямой получаем конфигурацию с

а после повторения указанной выше процедуры добавления прямой раз получим конфигурацию с .

Суммируя результаты пунктов 1)-5), получаем конфигурации прямых на действительной проективной плоскости с любыми целыми значениями такими, что .

В данной задаче , таким образом, может принимать любое целое неотрицательное значение, не превосходящее 13, за исключением .