***Задача 240 (5 баллов)***

***Ответ***: При заданном количестве треугольных граней $f\_{3}\geq 4$ количество пятиугольных граней $f\_{5}$ может принимать любое целое неотрицательное значение, не превосходящее $f\_{3}-4$ , за исключением $f\_{3}-5$. В задаче - это числа $0,1,2,…,10,11$ и $13.$

***Решение***:

При проведении одной прямой на действительной проективной плоскости образуется одна область. Далее, пусть уже проведено $(n-1) $ прямых, тогда при проведении $n $-ой прямой образуется $(n-1) $ точка пересечения с уже проведенными прямыми, которые на $n $-ой прямой высекают $(n-1) $ отрезков, которые в свою очередь, делят $(n-1) $ грань каждую на новые две. Так что количество граней увеличивается на $(n-1) $. А всего получается $1+1+2+…+\left(n-1\right)=\frac{n\left(n-1\right)}{2}+1$ граней. Получаем $f=\frac{n\left(n-1\right)}{2}+1$.

Пусть при проведении $n\geq 3 $ прямых на проективной плоскости образовались грани с вектором $\left(f\_{3},f\_{4},…,f\_{k}\right)$. Тогда у соответствующего графа для количества рёбер $e$ имеем $2e=3f\_{3}+4f\_{4}+…+kf\_{k}$. Количество точек пересечения прямых равно $v=\frac{n\left(n-1\right)}{2} $, и на каждой прямой лежит $(n-1) $ рёбер, поэтому $e=n\left(n-1\right) .$

Получаем $v+f-e=\frac{n\left(n-1\right)}{2}+\frac{n\left(n-1\right)}{2}+1-n\left(n-1\right)=1$.

А также $3f\_{3}+4f\_{4}+…+kf\_{k}=2e=4\left(f-1\right)=4(f\_{3}+f\_{4}+…+f\_{k}-1)$.

И в результате,

$f\_{3}=f\_{5}+2f\_{6}+…+\left(k-4\right)f\_{k}+4.$ (1)

Получаем оценку

$f\_{5} \leq f\_{3}-4$ . (2)

А если $f\_{5} \leq f\_{3}-5$, то, с учётом (1), $2f\_{6}+…+\left(k-4\right)f\_{k}=f\_{3}-f\_{5}-4\geq 1$, и тогда $2f\_{6}+…+\left(k-4\right)f\_{k}\geq 2$, поэтому $f\_{5} \leq f\_{3}-6$, и $f\_{5} \ne f\_{3}-5$.

Для каждой пары чисел $f\_{3}$, $f\_{5}$, удовлетворяющих полученным необходимым условиям, построим соответствующую конфигурацию прямых на действительной проективной плоскости.

1) При $m\geq 6$ рассмотрим конфигурацию из прямых, содержащих стороны выпуклого $m$ -угольника. Получим $m$ треугольных граней, одну $m$ -угольную грань и $\frac{m\left(m-3\right)}{2}$ четырёхугольных граней: $f\_{3}=m, f\_{5}=0.$ Возьмём две соседние по стороне четырёхугольные грани, и через точку на общей стороне проведём прямую, лишь чуть-чуть отклоняющуюся от прямой, содержащей эту сторону.

Эта прямая линия разбивает каждую из этих двух четырёхугольных граней на треугольную и пятиугольную грани. А каждую остальную грань, которую она пересекает, разбивает на четырёхугольную и другую - с тем же количеством сторон. Количество треугольных граней увеличивается на две, количество пятиугольных граней также увеличивается на две, а количество четырёхугольных увеличивается на $(m-4)$. Получаем конфигурацию с $f\_{3}=m+2, f\_{5}=2$.



Заметим, что как до, так и после проведения прямой, имеется пара соседних четырёхугольных граней. Повторяя эту процедуру $k$ раз, получим конфигурацию с $f\_{3}=m+2k, f\_{5}=2k$.

Например, при $m=6$ начальная конфигурация с $f\_{3}=6, f\_{5}=0 $имеет вид



При добавлении одной прямой получаем конфигурацию с $f\_{3}=8, f\_{5}=2:$



При добавлении ещё одной прямой получаем конфигурацию с $f\_{3}=10, f\_{5}=4$:



И т. д.

2) Далее, при $m\geq 7$ рассмотрим конфигурацию из прямых, содержащих стороны выпуклого $m$ -угольника. Одну из прямых параллельным переносом сместим за ближайшую точку пересечения прямых, содержащих соседние к данной стороны -угольника, тогда в новой конфигурации $f\_{3}=m, f\_{5}=1$.

**

Повторяя описанную ранее процедуру добавления прямой $k$ раз, получим конфигурацию с $f\_{3}=m+2k, f\_{5}=1+2k$.

3) А теперь рассмотрим в качестве начальной конфигурацию из прямых, содержащих стороны выпуклого пятиугольника. В этом случае имеем $f\_{3}=5, f\_{5}=1$:



При добавлении одной прямой получаем конфигурацию с $f\_{3}=7, f\_{5}=3:$



При добавлении ещё одной прямой получаем конфигурацию с $f\_{3}=9, f\_{5}=5$:



а после повторения указанной процедуры $k$ раз получим конфигурацию с $f\_{3}=5+2k, f\_{5}=1+2k$.

4) Заметим, что для конфигурации всего трёх прямых $f\_{3}=4, f\_{5}=0$.

5) А для следующей конфигурации шести прямых $f\_{3}=6, f\_{5}=2$:



При добавлении одной прямой получаем конфигурацию с $f\_{3}=8, f\_{5}=4:$

а после повторения указанной выше процедуры добавления прямой $k$ раз получим конфигурацию с $f\_{3}=6+2k, f\_{5}=2+2k$.

Суммируя результаты пунктов 1)-5), получаем конфигурации прямых на действительной проективной плоскости с любыми целыми значениями $f\_{3}, f\_{5}$ такими, что $f\_{5}\geq 0, f\_{3}-f\_{5}\geq 4,f\_{3}-f\_{5}\ne 5$.

В данной задаче $f\_{3}=17$, таким образом, $f\_{5}$ может принимать любое целое неотрицательное значение, не превосходящее 13, за исключением $12$.