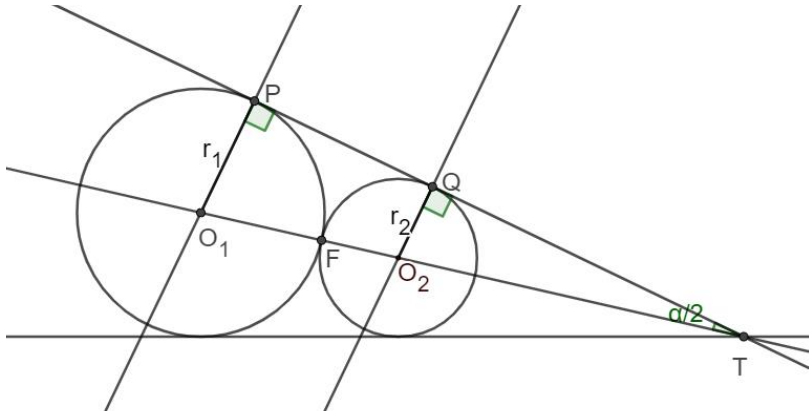
MM 254 (5 баллов)

Ответ: Да, сумма площадей вписанных кругов станет больше, чем 0,8 от площади треугольника на пятом шаге, и таким образом, будет нарисовано всего шесть кругов.

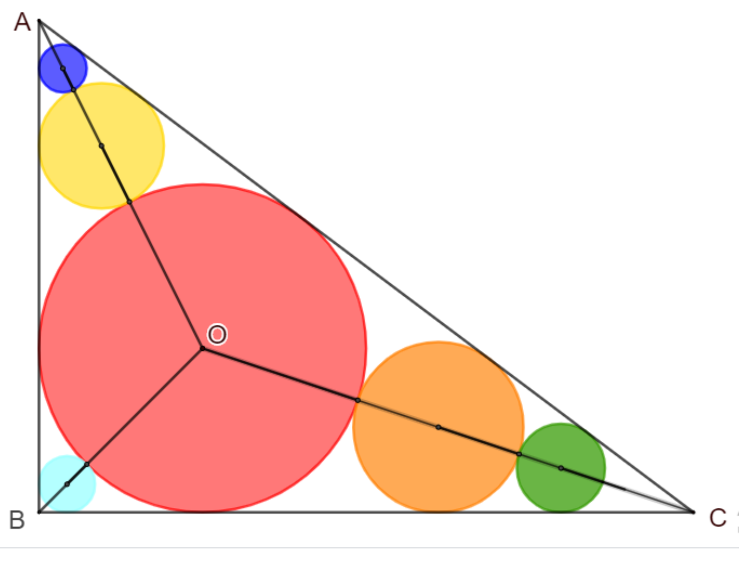
Решение:



Пусть задан угол величины α, и в него вписаны две окружности радиусов r_1, r_2, касающиеся друг друга. Тогда из прямоугольных треугольников TQO_2, TPO_1последовательно получаем $TO_2 = \frac{r_2}{sin\frac{\alpha}{2}}, TO_1 = TO_2 + O_2F + FO_1 = \frac{r_2}{sin\frac{\alpha}{2}} + r_2 + r_1,\ PO_1 = TO_1 sin\frac{\alpha}{2} \Rightarrow r_1 = \left(\frac{r_2}{sin\frac{\alpha}{2}} + r_2 + r_1\right) sin\frac{\alpha}{2} \Rightarrow$

$$r_2 = r_1 \frac{1-sin\frac{\alpha}{2}}{1+sin\frac{\alpha}{2}} \qquad (1)$$

Так что при последовательном вписывании кругов в угол величины α каждый последующий круг имеет радиус в $k = \frac{1-sin\frac{\alpha}{2}}{1+sin\frac{\alpha}{2}} < 1$ раз больше предыдущего.



В нашем случае углы треугольника со сторонами 3, 4, 5 равны $\frac{\pi}{2}, arctg\frac{3}{4}, arctg\frac{4}{3}$ и для каждого из этих углов мы определим радиусы и площади последовательно вписанных кругов, касающихся сторон угла.

Вписанная окружность имеет радиус $r_0 = \frac{AB+BC-AC}{2} = \frac{3+4-5}{2} = 1$, а площадь круга равна $\pi \ \approx 3{,}14152$

$\alpha = \frac{\pi}{2}$: $k = \frac{1-sin\frac{\alpha}{2}}{1+sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$, площадь первого вписанного круга, касающегося сторон AB и BC равна $\pi\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^2 \approx 0{,}09248$, площадь второго вписанного круга равна $\pi\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^4 \approx 0{,}00272$ и т. д.

$\alpha = arctg\frac{3}{4}$: $tg\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}, sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{10},} k = \frac{1-sin\frac{\alpha}{2}}{1+sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-\frac{1}{\sqrt{10},}}{1+\frac{1}{\sqrt{10},}} = \frac{\sqrt{10}-1}{\sqrt{10}+1}$, площадь первого вписанного круга, касающегося сторон BC и CA равна $\pi\left(\frac{\sqrt{10}-1}{\sqrt{10}+1}\right)^2 \approx 0{,}84783$, площадь второго вписанного круга равна $\pi\left(\frac{\sqrt{10}-1}{\sqrt{10}+1}\right)^4 \approx 0{,}22881$, площадь третьего вписанного круга равна $\pi\left(\frac{\sqrt{10}-1}{\sqrt{10}+1}\right)^6 \approx 0{,}06175$ и т. д.

$\alpha = arctg\frac{4}{3}$: $tg\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}, sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{5},} k = \frac{1-sin\frac{\alpha}{2}}{1+sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-\frac{1}{\sqrt{5},}}{1+\frac{1}{\sqrt{5},}} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}$, площадь первого вписанного круга, касающегося сторон AB и AC равна $\pi\left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right)^2 \approx 0{,}45835$, площадь второго вписанного круга равна $\pi\left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right)^4 \approx 0{,}06687$, площадь третьего вписанного круга равна $\pi\left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right)^6 \approx 0{,}00976$ и т. д.

Площадь исходного треугольника равна 6, нам необходимо добраться до 0,8 от 6, то есть до 4,8.

Упорядочим по убыванию несколько первых значений площадей кругов:

$$\pi\left(\frac{\sqrt{10}-1}{\sqrt{10}+1}\right)^2 > \pi\left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right)^2 > \pi\left(\frac{\sqrt{10}-1}{\sqrt{10}+1}\right)^4 > \pi\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^2 > \pi\left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right)^4$$

Заметим, что вместе с исходным вписанным кругом четыре наибольшие из всех трех последовательностей в сумме дают площадь

$$\pi+\pi\left(\frac{\sqrt{10}-1}{\sqrt{10}+1}\right)^2+\pi\left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right)^2+\pi\left(\frac{\sqrt{10}-1}{\sqrt{10}+1}\right)^4+\pi\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^2 \approx 4{,}76907 < 4{,}8$$

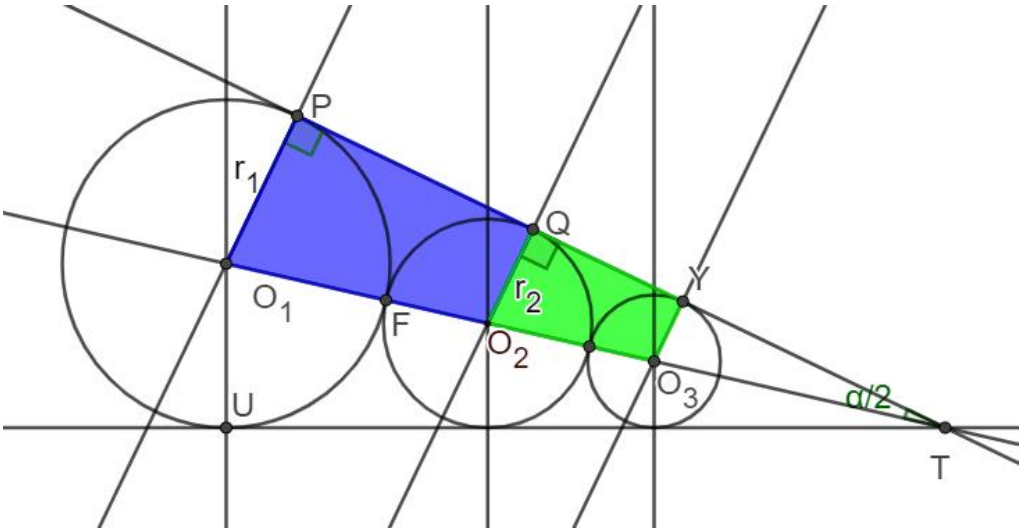
А вместе с исходным вписанным кругом пять наибольших из всех трех последовательностей в сумме дают площадь

$$\pi+\pi\left(\frac{\sqrt{10}-1}{\sqrt{10}+1}\right)^2+\pi\left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right)^2+\pi\left(\frac{\sqrt{10}-1}{\sqrt{10}+1}\right)^4+\pi\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^2 + \pi\left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right)^4 \approx 4{,}83594 > 4{,}8$$

Таким образом**, сумма площадей вписанных кругов станет больше, чем 0,8 от площади треугольника только на пятом шаге, и таким образом, будет нарисовано всего шесть кругов.**

Рассмотрим более общий вопрос о том, **какие значения может принимать отношение M суммы площадей всех нарисованных кругов к площади треугольника в случае произвольного треугольника.**

Оценка снизу:



Если из центров трех последовательно вписанных в один угол кругов опустить перпендикуляры на одно сторону, то образуются две подобные трапеции PQO_2O_1 и QYO_3O_2, поскольку их углы равны, а соответствующие стороны пропорциональны с коэффициентом k. И части кругов, попадающих в эти трапеции также подобны с тем же коэффициентом. Поэтому для всех таких трапеций отношение L площади $S_{\text{сект}}$ двух секторов кругов, попадающих в эту трапецию к площади трапеции одинаковое.

Найдем значение величины L для трапеции PQO_2O_1 :

$$S_{PQO_2O_1} = \frac{PO_1+QO_2}{2}PQ = \frac{r_1+r_2}{2}O_1O_2cos\frac{\alpha}{2} = \frac{(r_1+r_2)^2cos\frac{\alpha}{2}}{2} \tag{2}$$

$$S_{\text{сект}} = \frac{{r_1}^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)+{r_2}^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}{2} \tag{3}$$

Покажем, что

$$L = \frac{S_{\text{сект}}}{S_{PQO_2O_1}} > \frac{\pi}{4} \tag{4}$$

Для этого, с учетом (1), (2), (3) вычисляем:

$$\frac{S_{\text{сект}}}{S_{PQO_2O_1}} - \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi - 2\alpha sin\frac{\alpha}{2} - \pi cos\frac{\alpha}{2} - \pi cos^2\frac{\alpha}{2}}{4cos\frac{\alpha}{4}}$$

Заметим, что на интервале $(0,\pi)$ функция $sin\frac{\alpha}{2}$ выпукла кверху, поэтому на этом интервале она принимает значения большие, чем линейная функция, соответствующая секущей, проходящей через точки $(0,0), (\pi,1)$:

$$sin\frac{\alpha}{2} > \frac{\alpha}{\pi}$$

Учитывая эту оценку, получаем

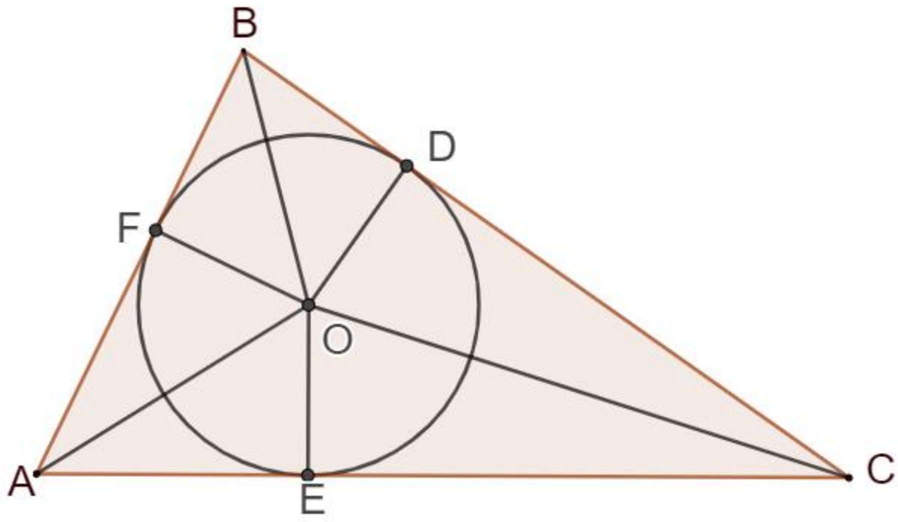
$$2\pi - 2\alpha sin\frac{\alpha}{2} - \pi cos\frac{\alpha}{2} - \pi cos^2\frac{\alpha}{2} > 2\pi - 2\pi sin\frac{\alpha}{2}sin\frac{\alpha}{2} - \pi cos\frac{\alpha}{2} - \pi cos^2\frac{\alpha}{2}$$
$$= -\pi cos\frac{\alpha}{2} + \pi cos^2\frac{\alpha}{2} = \pi cos\frac{\alpha}{2}\left(1 - cos\frac{\alpha}{2}\right) > 0$$

В результате получаем оценку (4)

Рассмотрим теперь произвольный треугольник ABC.

Тогда, как показано, сумма площадей всех кругов, попадающих в четырехугольник $AFOE$ вместе с площадью сектора вписанного в треугольник

ABC круга, попадающего в четырехугольник $AFOE$ больше, чем $\frac{\pi}{4}S_{\text{AFOE}}$. Такая же оценка справедлива и для четырехугольников $BDOF$ и $CEOD$



Таким образом, получена оценка

$$M > \frac{\pi}{4}$$

<u>Оценка сверху:</u>

Пусть теперь в треугольник со углами α, β, γ вписана окружность радиуса 1, без ограничения общности.

Как нетрудно убедиться, $S_{ABC} = ctg\frac{\alpha}{2} + ctg\frac{\beta}{2} + ctg\frac{\gamma}{2}$.

Площадь вписанного круга равна π.

Радиусы кругов, последовательно вписанных и касающихся сторон угла CAB, образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $k = \frac{1-sin\frac{\alpha}{2}}{1+sin\frac{\alpha}{2}}$. Поэтому сумма площадей всех таких кругов посчитаем, как сумму бесконечной геометрической прогрессии, и она равна $\pi\frac{k^2}{1-k^2} = \pi\frac{\left(1-sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}{4sin\frac{\alpha}{2}}$.

А сумма площадей всех кругов равна $\pi\left(1 + \frac{\left(1-sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}{4sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{\left(1-sin\frac{\beta}{2}\right)^2}{4sin\frac{\beta}{2}} + \frac{\left(1-sin\frac{\gamma}{2}\right)^2}{4sin\frac{\gamma}{2}}\right)$

Тогда $M = \frac{\pi\left(1+\frac{\left(1-sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}{4sin\frac{\alpha}{2}}+\frac{\left(1-sin\frac{\beta}{2}\right)^2}{4sin\frac{\beta}{2}}+\frac{\left(1-sin\frac{\gamma}{2}\right)^2}{4sin\frac{\gamma}{2}}\right)}{ctg\frac{\alpha}{2}+ctg\frac{\beta}{2}+ctg\frac{\gamma}{2}}$. Заметим, что для правильного треугольника $M = \frac{11\pi}{24\sqrt{3}}$.

Покажем, что это значение наибольшее возможное. Для этого докажем оценку

$$\frac{\pi\left(1+\frac{\left(1-sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}{4sin\frac{\alpha}{2}}+\frac{\left(1-sin\frac{\beta}{2}\right)^2}{4sin\frac{\beta}{2}}+\frac{\left(1-sin\frac{\gamma}{2}\right)^2}{4sin\frac{\gamma}{2}}\right)}{ctg\frac{\alpha}{2}+ctg\frac{\beta}{2}+ctg\frac{\gamma}{2}} \le \frac{11\pi}{24\sqrt{3}} \quad (5)$$

Неравенство (5) равносильно следующему неравенству

$$sin\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{sin\frac{\alpha}{2}}+sin\frac{\beta}{2}+\frac{1}{sin\frac{\beta}{2}}+sin\frac{\gamma}{2}+\frac{1}{sin\frac{\gamma}{2}}-\frac{11}{6\sqrt{3}}(ctg\alpha+ctg\beta+ctg\gamma) \le 2 \quad (6)$$

Далее, на интервале $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ рассмотрим функцию

$$G(y) = siny + \frac{1}{siny} - \frac{11}{6\sqrt{3}}ctgy$$

Вычислим её производные

$$G'(y) = \frac{11\sqrt{3} - 18cos^3y}{18sin^2y}$$

$$G''(y) = -\frac{cosy\left(11\sqrt{3} + 9cos^3y - 27\,cosy\right)}{9sin^3y}$$

Заметим, что для функции $u(y) = 11\sqrt{3} + 9cos^3y - 27\,cosy$

$$u(0) = 11\sqrt{3} - 18 > 0$$

а $u'(y) = -27sinycos^2y + 27siny = 27siny(1 - cos^2y) > 0$ на $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, значит функция $u(y)$ на интервале $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ возрастает и потому $u(y) > u(0) > 0$.

Следовательно, на интервале $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ $G''(y) < 0$. Значит, справедливо неравенство Йенсена для функции $G(y)$

$$\frac{1}{3}G\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\frac{1}{3}G\left(\frac{\beta}{2}\right)+\frac{1}{3}G\left(\frac{\gamma}{2}\right) \le G\left(\frac{\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}}{3}\right) = G\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{6}\right) = G\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2}{3}$$

Получаем неравенство $G\left(\frac{\alpha}{2}\right)+G\left(\frac{\beta}{2}\right)+G\left(\frac{\gamma}{2}\right)\leq 2$, а это и есть неравенство (6).

Оценка (5) доказана. Таким образом, для произвольного треугольника справедлива оценка

$$M\leq\frac{11\pi}{24\sqrt{3}}$$

С учетом нижней оценки получаем весь возможный диапазон значений

$$\frac{\pi}{4}<M\leq\frac{11\pi}{24\sqrt{3}} \tag{7}$$

Покажем, что любое значение из диапазона достигается.

Начиная с правильного треугольника, рассмотрим непрерывное движение одной из его вершин вдоль серединного перпендикуляра, проведенного к противоположной стороне в сторону от противоположной стороны. Таким образом, угол при вершине получающегося равнобедренного треугольника стремиться к нулю $\alpha\to 0$. С учетом полученного (в том месте, где рассматривалась оценка снизу) отношения суммы площадей всех кругов, попадающих в четырехугольник (образованный радиусами, перпендикулярными сторонам и отрезками касательных) с одной из вершин, совпадающей с вершиной равнобедренного треугольника, вместе с площадью сектора вписанного в треугольник круга, попадающего в четырехугольник, равного

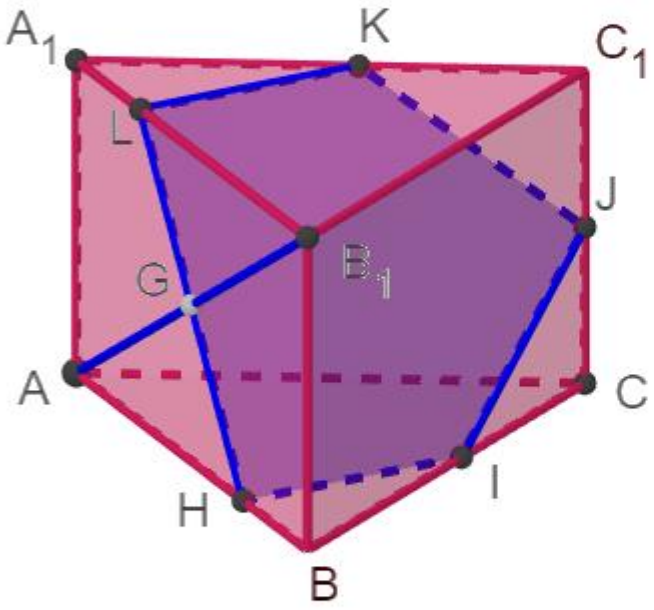
$$\frac{2\pi-2\alpha sin\frac{\alpha}{2}-\pi cos\frac{\alpha}{2}-\pi cos^2\frac{\alpha}{2}}{4cos\frac{\alpha}{4}}+\frac{\pi}{4}$$

замечаем, что при $\alpha\to 0$

$$\frac{2\pi-2\alpha sin\frac{\alpha}{2}-\pi cos\frac{\alpha}{2}-\pi cos^2\frac{\alpha}{2}}{4cos\frac{\alpha}{4}}+\frac{\pi}{4}\to\frac{\pi}{4}$$

При таком стремлении этот член будет основным в асимптотике, так как части остальных кругов не превосходят площади двух квадратов, построенных на двух половинах основания.

Таким образом, при таком движении мы получим все значения из указанного диапазона (7).


A
1
K
C
1
L
J
G
B
1
A
C
H
I
B