ММ 268 (5 баллов)

Ответ: существует всего три недопустимых числа.

Решение: рассмотрим представления (не больше двух) для первых натуральных чисел

$$1 = 1$$
$$2 = 1 \cdot 2$$
$$3 = 1 + 2$$
$$5 = 1 \cdot 2 + 3 = 1 \cdot 3 + 2$$
$$6 = 1 + 2 + 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3$$
$$7 = 1 + 2 \cdot 3$$
$$9 = 1 \cdot 2 + 3 + 4 = 2 + 1 \cdot 3 + 4$$
$$10 = 1 + 2 + 3 + 4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 4$$
$$11 = 1 + 2 \cdot 3 + 4 = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4$$
$$12 = 1 + 3 + 2 \cdot 4$$

Замечаем, что при $n \geq 3$ мы можем получить такие представления

$$\frac{n(n+1)}{2} - 1 = 1 \cdot 2 + 3 + \cdots + n$$
$$\frac{n(n+1)}{2} = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

При $k = 3, \ldots, n$ заменяя два слагаемых 2 и k (или $1 \cdot 2$) и k на одно $2 \cdot k$ (или на $1 \cdot 2 \cdot k$), мы увеличиваем представляемое число на $k - 2$, то есть получаем представление для числа $\frac{n(n+1)}{2} + k - 2$ (или $\frac{n(n+1)}{2} + k - 3$). Таким образом получаем представление для каждого числа из отрезка $\left[\frac{n(n+1)}{2} - 1, \frac{n(n+1)}{2} + n - 2\right]$ или в таком виде $\left[\frac{n(n+1)}{2} - 1, \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 3\right]$ (причем для каждого числа из отрезка $\left[\frac{n(n+1)}{2}, \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 4\right]$ мы имеем уже по два допустимых представления).

С учетом представлений для чисел 1,2,3 мы уже имеем необходимые представления для всех натуральных чисел, за исключением чисел вида $\frac{n(n+1)}{2}+n-1=\frac{(n+1)(n+2)}{2}-2, n\geq 2$: $\quad 4,8,13,19,26,34,43,53,64,\ldots$

1) $n=2s+1, s\geq 2$. Заметим, что $3<\frac{n+3}{2}<n$. Поэтому можем в сумме $\frac{n(n+1)}{2}-1=1\cdot 2+3+\cdots+n$ заменить два слагаемых 3 и $\frac{n+3}{2}$ на одно $3\cdot\frac{n+3}{2}$. При этом мы увеличиваем представляемое число на $3\cdot\frac{n+3}{2}-3-\frac{n+3}{2}=n$, то есть получаем представление для числа $\frac{n(n+1)}{2}+n-1=\frac{(n+1)(n+2)}{2}-2$:

$$19=1\cdot 2+3\cdot 4+5$$

$$34=1\cdot 2+4+3\cdot 5+6+7$$

$$53=1\cdot 2+4+5+3\cdot 6+7+8+9$$

…

2) $n=2s, s\geq 3$. Заметим, что $3<\frac{n+2}{2}<n$. Поэтому можем в сумме $\frac{n(n+1)}{2}=1+2+3+\cdots+n$ заменить два слагаемых 3 и $\frac{n+2}{2}$ на одно $3\cdot\frac{n+2}{2}$. При этом мы увеличиваем представляемое число на $3\cdot\frac{n+2}{2}-3-\frac{n+2}{2}=n-1$, то есть получаем представление для числа $\frac{n(n+1)}{2}+n-1=\frac{(n+1)(n+2)}{2}-2$.

$$26=1+2+3\cdot 4+5+6$$

$$43=1+2+4+3\cdot 5+6+7+8$$

$$64=1+2+4+5+3\cdot 6+7+8+9+10$$

…

Непосредственно перебираем все возможные варианты для чисел 4 ($n\leq 2$), 8 ($n\leq 3$), 13 ($n\leq 4$) и убеждаемся, что **числа $\mathbf{4,8,13}$ представить указанным способом нельзя.**

Интересен вопрос о числах, для которых существует **единственное представление.**

Таковыми числами, как минимум, являются 1,2,3,7,12,18 – убеждаемся непосредственно перебирая все возможные варианты.

Как было замечено ранее, кандидатами таких чисел, больших 4, являются только числа вида

$$\frac{n(n+1)}{2}+n-2, \frac{n(n+1)}{2}+n-1, \frac{n(n+1)}{2}+n \qquad (1)$$

В представлении $\frac{n(n+1)}{2}+n=1\cdot 2+3+\cdots+n+(n+1)$ множитель 1 можно переставить от 2 к любому другому числу, не изменяя представляемого числа. Так что для таких чисел существует, как минимум, два допустимых представления, и поэтому числа $\frac{n(n+1)}{2}+n, n\geq 2$, как кандидаты отпадают.

Остаются числа серий

$$\frac{n(n+1)}{2}+n-2,\ \frac{n(n+1)}{2}+n-1, n\geq 3 \qquad (2)$$

Для чисел серий (2) нами уже были найдены представления, в которых в произведениях наименьший множитель не больше 3. Далее мы будем искать представления, в которых будут произведения с наименьшим множителем, большим 3.

Пусть $n\geq 5$.

В каждом представлении при $m\geq 5$

$$\frac{m(m+1)}{2}-1=1\cdot 2+3+\cdots+m$$

$$\frac{m(m+1)}{2}=1+2+3+\cdots+m$$

$$\frac{m(m+1)}{2}+1=1+2\cdot 3+\cdots+m$$

мы можем слагаемые 4 и $s\geq 5$ заменить на произведение $4\cdot s$, при этом мы получим новые представление для таких чисел

$$\frac{m(m+1)}{2}+3s-5, \frac{m(m+1)}{2}+3s-4, \frac{m(m+1)}{2}+3s-3$$

1)$n = 3t$ для нового представления числа $\frac{n(n+1)}{2} + n - 2$ подбираем значения параметров m, s так, чтобы выполнялось равенство $\frac{n(n+1)}{2} + n - 2 = \frac{m(m+1)}{2} + 3s - 5$:

$m = n, s = t + 1, t \geq 4$ и получаем

$$\frac{n(n+1)}{2} + n - 2 = 1 \cdot 2 + 3 + 4 \cdot (t+1) + 5 + \cdots + t + (t+2) + \cdots + n$$

И тогда получаем и такое представление

$$\frac{n(n+1)}{2} + n - 1 = 1 + 2 + 3 + 4 \cdot (t+1) + 5 + \cdots + t + (t+2) + \cdots + n$$

Приведем первые несколько представлений из этой серии

$$88 = 1 \cdot 2 + 3 + 4 \cdot 5 + 6 + 7 + \cdots + 12$$

$$89 = 1 + 2 + 3 + 4 \cdot 5 + 6 + 7 + \cdots + 12$$

$$133 = 1 \cdot 2 + 3 + 4 \cdot 6 + 5 + 7 + 8 + \cdots + 15$$

$$134 = 1 + 2 + 3 + 4 \cdot 6 + 5 + 7 + 8 + \cdots + 15$$

$$187 = 1 \cdot 2 + 3 + 5 + 6 + 4 \cdot 7 + 8 + 9 + \cdots + 18$$

$$188 = 1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 4 \cdot 7 + 8 + 9 + \cdots + 18$$

...

2)$n = 3t + 1$ для нового представления числа $\frac{n(n+1)}{2} + n - 2$ подбираем значения параметров m, s так, чтобы выполнялось равенство $\frac{n(n+1)}{2} + n - 2 = \frac{m(m+1)}{2} + 3s - 4$:

$m = n, s = t + 1, t \geq 4$ и получаем

$$\frac{n(n+1)}{2} + n - 2 = 1 + 2 + 3 + 4 \cdot (t+1) + 5 + \cdots + t + (t+2) + \cdots + n$$

И тогда получаем и такое представление

$$\frac{n(n+1)}{2} + n - 1 = 1 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot (t+1) + 5 + \cdots + t + (t+2) + \cdots + n$$

$$102 = 1 + 2 + 3 + 4 \cdot 5 + 6 + 7 + \cdots + 13$$

$$103 = 1 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 6 + 7 + \cdots + 13$$

$$150 = 1 + 2 + 3 + 4 \cdot 6 + 5 + 7 + 8 + \cdots + 16$$

$$151 = 1 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 6 + 5 + 7 + 8 + \cdots + 16$$

$$207 = 1 + 2 + 3 + 4 \cdot 7 + 5 + 6 + 8 + 9 + \cdots + 19$$

$$208 = 1 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 7 + 5 + 6 + 8 + 9 + \cdots + 19$$

…

3)$n = 3t + 2$ для нового представления числа $\frac{n(n+1)}{2} + n - 2$ подбираем значения параметров m, s так, чтобы выполнялось равенство

$\frac{n(n+1)}{2} + n - 2 = \frac{m(m+1)}{2} + 3s - 3$:

$m = n, s = t + 1, t \geq 4$ и получаем

$$\frac{n(n+1)}{2} + n - 2 = 1 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot (t+1) + 5 + \cdots + t + (t+2) + \cdots + n$$

Аналогично для нового представления числа $\frac{n(n+1)}{2} + n - 2$ подбираем значения параметров m, s так, чтобы выполнялось равенство

$\frac{n(n+1)}{2} + n - 1 = \frac{m(m+1)}{2} + 3s - 2$:

$m = n, s = t + 1, t \geq 4$ и получаем

$$\frac{n(n+1)}{2} + n - 1$$
$$= 1 \cdot 2 + 3 + 4 \cdot (t+2) + 5 + \cdots + (t+1) + (t+3) + \cdots + n$$

$$117 = 1 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 6 + 7 + \cdots + 14$$

$$118 = 1 \cdot 2 + 3 + 4 \cdot 6 + 5 + 7 + 8 + \cdots + 14$$

$$168 = 1 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 6 + 5 + 7 + 8 + \cdots + 17$$

$$169 = 1 \cdot 2 + 3 + 4 \cdot 7 + 5 + 6 + 8 + 9 + \cdots + 17$$

$$228 = 1 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 7 + 5 + 6 + 8 + 9 + \cdots + 20$$

$$229 = 1 \cdot 2 + 3 + 4 \cdot 8 + 5 + 6 + 7 + 9 + 10 + \cdots + 20$$

…

Укажем представления (не больше двух) для чисел серий (2) при $4 \leq n \leq 11$:

$$n = 4:$$

$$12 = 1 + 3 + 2 \cdot 4$$

$$n = 5:$$

$$18 = 1 + 3 + 2 \cdot 5 + 4$$

$$19 = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 = 2 + 1 \cdot 3 \cdot 4 + 5$$

$$n = 6:$$

$$25 = 1 + 3 + 4 + 5 + 2 \cdot 6 = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 + 6$$

$$26 = 1 + 2 + 3 \cdot 4 + 5 + 6 = 1 + 2 + 3 + 4 \cdot 5$$

$$n = 7:$$

$$33 = 1 + 3 + 4 + 5 + 6 + 2 \cdot 7 = 1 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 6$$

$$34 = 1 \cdot 2 + 4 + 3 \cdot 5 + 6 + 7 = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$n = 8:$$

$$42 = 1 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 2 \cdot 8 = 1 + 3 + 2 \cdot 4 + 5 \cdot 6$$

$$43 = 1 + 2 + 3 \cdot 5 + 4 + 6 + 7 + 8 = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot 5$$

$$n = 9:$$

$$52 = 1 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 2 \cdot 9 = 1 + 2 \cdot 3 + 4 + 6 + 5 \cdot 7$$

$$53 = 1 \cdot 2 + 4 + 5 + 3 \cdot 6 + 7 + 8 + 9 = 1 + 2 + 3 + 4 \cdot 7 + 5 + 6 + 8$$

$$n = 10:$$

$$\begin{aligned} 63 &= 1 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 2 \cdot 10 \\ &= 1 \cdot 2 + 3 \cdot 6 + 4 + 5 + 7 + 8 + 9 + 10 \end{aligned}$$

$$64 = 1 + 2 + 3 \cdot 6 + 4 + 5 + 7 + 8 + 9 + 10 = 1 + 2 \cdot 4 \cdot 6 + 3 \cdot 5$$

$$n = 11:$$

$$\begin{aligned} 75 &= 1 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 2 \cdot 11 \\ &= 1 \cdot 2 + 3 + 4 \cdot 5 + 6 \cdot 7 + 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 76 &= 1 \cdot 2 + 3 \cdot 7 + 4 + 5 + 6 + 8 + 9 + 10 + 11 \\ &= 1 + 2 + 3 + 4 \cdot 5 + 6 \cdot 7 + 8 \end{aligned}$$

Таким образом, числами, для которых существует **единственное допустимое представление,** являются числа 1,2,3,7,12,18 и только они. Суммируем,

для чисел $\mathbf{4, 8, 13}$ не существует допустимых представлений,

для чисел $\mathbf{1, 2, 3, 7, 12, 18}$ существует единственное допустимое представление,

для чисел $\mathbf{5, 6, 9, 10, 11, 14, 15, 16, 17}, \boldsymbol{n \geq 19}$ существует не меньше двух различных допустимых представлений.