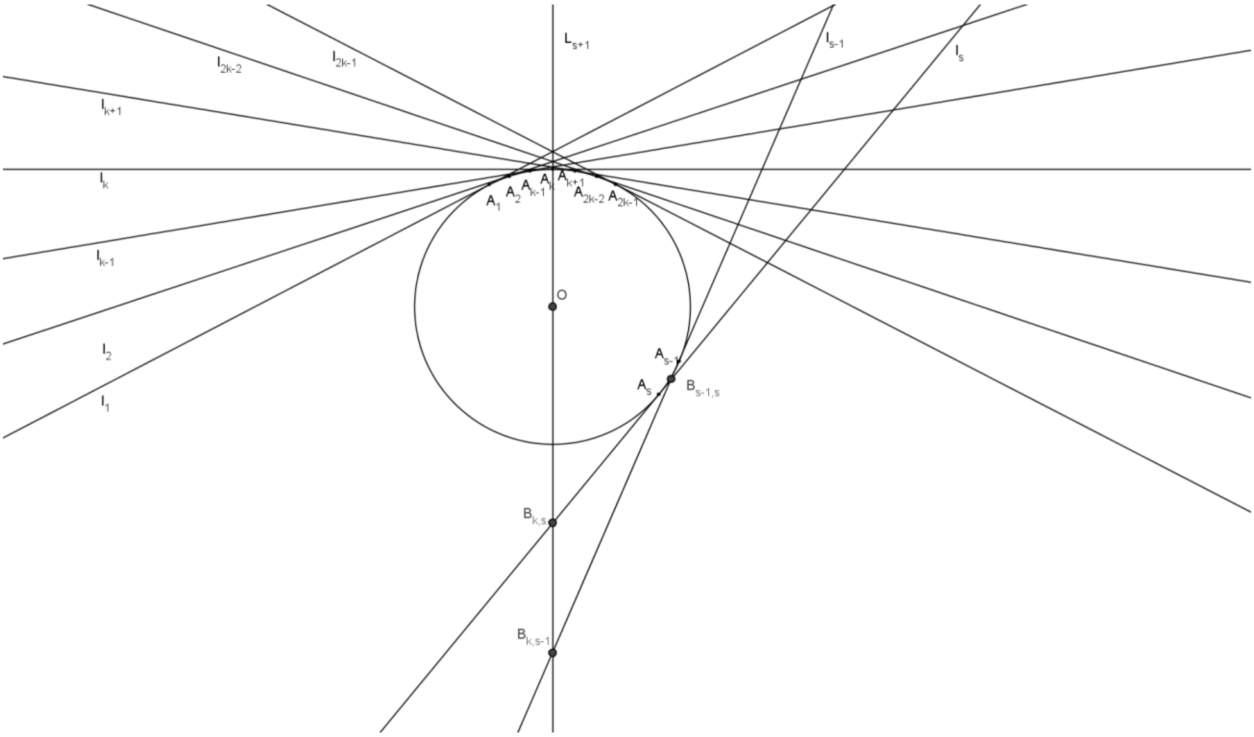
Задача 230 (5 баллов)

Ответ: Да, вектор граней конфигурации прямых общего положения может начинаться с чисел 157,5250,52.

Решение: Пусть заданы натуральные числа $\mathrm{k} > 2, \mathrm{s} > 2\mathrm{k}$. Рассмотрим на окружности ω с центром в точке O последовательно расположенные, например, в направлении по часовой стрелке точки $A_1, A_2, \dots, A_s$ такие, что углы $\angle A_1OA_2 = \angle A_2OA_3 = \cdots = \angle A_{2k-2}OA_{2k-1} = \delta$ (с достаточно малым δ таким, что $(k-1)\delta < 90^0$ и $\angle A_kOA_{s-2} < 90^0, \angle A_kOA_{s-1} > 90^0, \angle A_1OA_s < 180^0$. Через каждую точку $A_i, i = 1, \dots, s$ проведём касательную l_i к окружности ω.



В полученной конфигурации α прямые $l_i, i = 1, \dots, s$ делят плоскость на $(s-2)$ элементарных треугольников и $\frac{(s-2)(s-3)}{2}$ элементарных четырёхугольников.

Далее, через точки O и A_k проведём прямую L_{s+1}. Поскольку при $i = 1, \dots, k-1$ точки A_i и A_{2k-i} симметричны относительно прямой L_{s+1}, то прямые l_i и l_{2k-i} также симметричны относительно прямой L_{s+1}, и поэтому точки пересечения пар прямых l_i и l_{2k-i} лежат на прямой L_{s+1}. Сместим прямую L_{s+1} параллельным переносом влево на достаточно малую величину сдвига. В результате получим прямую l_{s+1}. После добавления прямой l_{s+1} в конфигурацию α образуется $(2k-4)$ новых элементарных пятиугольников (элементарные пятиугольники образуются только при пересечении элементарных четырёхугольников конфигурации α, ограниченных прямыми $l_i, l_{i+1}, l_{2k-i-1}, l_{2k-i}$ для каждого $i = 1, \dots, k-2$ и при пересечении элементарных четырёхугольников конфигурации α, ограниченных прямыми $l_i, l_{i+1}, l_{2k-i-2}, l_{2k-i-1}$ для каждого $i = 1, \dots, k-2$) , количество элементарных треугольников увеличивается на $(2k-2)$ ($2k-4$ треугольника образуется при пересечении указанных выше четырёхугольников конфигурации α и ещё два: один ограничен прямыми l_1, l_{s+1}, l_{2k-1}, а второй – прямыми l_{s-1}, l_s, l_{s+1}), а количество элементарных четырёхугольников – на $(s-4k+4)$.

Образуется также элементарный многоугольник с $(s-k+2)$ вершинами, ограниченный прямыми $l_k, l_{k+1}, \dots, l_s, l_{s+1}$ (для выбранных чисел $s, k: s-k+2 > 5$). В полученной конфигурации элементарных треугольников всего $f_3 = s-2+2k-2 = s+2k-4$, элементарных четырёхугольников всего $f_4 = \frac{(s-2)(s-3)}{2} + s - 4k + 4 = \frac{s^2-3s}{2} - 4k + 7$, а элементарных пятиугольников всего $f_5 = 2k-4$.

При $\boldsymbol{s = 105, k = 28}$ получаем $\boldsymbol{f_3 = 157, f_4 = 5250, f_5 = 52}$.

Таким образом,

1) построенная конфигурация позволяет получить вектор граней $\left(s+2k-4, \frac{s^2-3s}{2} - 4k + 7, 2k-4, \dots\right)$
2) если в указанной конструкции точки $A_1, A_2, \dots, A_s$ такие, что углы $\angle A_1OA_2 = \angle A_2OA_3 = \dots = \angle A_{2k-2}OA_{2k-1} = \delta$ (с достаточно малым δ) и $\angle A_kOA_s < 90^0$ получаем вектор граней $\left(s+2k-5, \frac{s^2-3s}{2} - 4k + 9, 2k-4\right)$.
3) Если в предыдущей конструкции последнюю прямую получаем смещением вправо, то векторы граней имеют вид $\left(s+2k-3, \frac{s^2-3s}{2} - 4k + 5, 2k-3, \dots\right)$ и соответственно $\left(s+2k-4, \frac{s^2-3s}{2} - 4k + 7, 2k-3\right)$ при $\mathrm{k} > 1, \mathrm{s} > 2\mathrm{k}$.

Таким образом, можно получить тройки $f_5 = t = 1, \dots, s-3$, $f_3 = s + t$, $f_4 = \frac{s(s-1)}{2} - s - 2t - 1$ и тройки $f_5 = t = 1, \dots, s-3$, $f_3 = s - 1 + t$, $f_4 = \frac{s(s-1)}{2} - s - 2t + 1$.

Интересен вопрос об ограничениях на первые три числа в векторе граней. Естественным является ограничение их суммы через общее число элементарных многоугольников в конфигурации n прямых

$$f_3 + f_4 + f_5 \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

Подсчитывая общее количество сторон, получаем

$$3f_3+4f_4+5f_5+6f_6+\cdots=2e_0+e_1=2n(n-2)-e_1$$

С учётом естественной оценки при $n\geq 4$ для количества внешних элементарных отрезков $e_1\geq 2n-2$ получаем

$3f_3+4f_4+5f_5+6\left(\frac{(n-1)(n-2)}{2}-f_3-f_4-f_5\right)\leq 3f_3+4f_4+5f_5+6f_6+\cdots=$ $2n(n-2)-e_1\leq 2n(n-2)-2n+2,$

откуда $3f_3+2f_4+f_5\geq n^2-3n+4.$

Таким образом, с необходимостью $f_3\geq f_5+2$ и

$$\left\lfloor\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+2f_3+2f_4+2f_5}\right\rfloor\leq\left\lfloor\frac{3}{2}+\sqrt{-\frac{7}{4}+3f_3+2f_4+f_5}\right\rfloor$$

Анализ возможных троек можно провести, например, с учётом следующей идеи. Также, как и в рассматриваемой выше конструкции можно, имея p прямых конфигурации α, разбивающих плоскость на $(p-2)$ треугольника и $\frac{(p-2)(p-3)}{2}$ четырёхугольников, проводить дополнительно до $p-3$ прямых, собранных в “пучок”, и, которые могут высекать из конфигурации α любое количество пятиугольников от 1 до $\frac{(p-2)(p-3)}{2}$. С учётом произвола троек на меньшем количестве прямых в диапазоне $[3,p-3]$, полученном на предыдущем шаге, можно получить достаточный произвол для диапазона $[3,2p-3]$ уже на следующем.

Рассмотрим общий случай и возникающий при этом внешний цикл возникшей конфигурации $(t_1, t_2, \dots, t_s)$.

В начальный момент одна прямая делит плоскость на две части, а после проведения каждой следующей r – ой прямой мы получаем $(r-1)$ точек пересечения с ранее проведенными прямыми. Эти точки делят проведенную прямую на r частей (из них два луча и $(r-2)$ отрезка), и каждой такой части соответствует ранее образованная многоугольная часть плоскости, разбиваемая проведенной прямой на две многоугольные области. Таким образом, количество многоугольных областей увеличивается на r, а количество неограниченных многоугольных областей увеличивается на 2. Получается, что при проведении n прямых на плоскости в общем положении образуется $2+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}+1$ областей, из них $2n$ неограниченных. Значит, ограниченных: $\frac{n(n+1)}{2}+1-2n=\frac{(n-2)(n-1)}{2}$. Каждой компоненте вектора внешнего цикла соответствует неограниченная многоугольная область. Таким образом, имеем равенство $s=2n$, откуда $n=\frac{s}{2}$. ***В нашем конкретном случае*** $\boldsymbol{s=20}$***, поэтому количество прямых равно*** $\boldsymbol{n=\frac{20}{2}=10}$.

Далее, каждая прямая имеет $(n-1)$ точек пересечения с другими прямыми, и на каждой прямой находится $(n-2)$ элементарных отрезка. Так что получается, что внешний контур ограничивает соответствующий граф, содержащий $\frac{n(n-1)}{2}$ вершин, $n(n-2)$ рёбер (элементарных отрезков) и, как следует из теоремы Эйлера для графов, $n(n-2)+1-\frac{n(n-1)}{2}=\frac{(n-2)(n-1)}{2}$ граней (элементарных многоугольников). ***В нашем конкретном случае образуется*** $\boldsymbol{\frac{(10-2)(10-1)}{2}=36}$ ***элементарных многоугольников.***

Далее, элементарные отрезки внешнего контура одновременно являются и отрезками - сторонами неограниченных многоугольных областей, у $i-$ой неограниченной многоугольной области таких сторон t_i-1. Так что ***общее число элементарных отрезков, ограничивающих внешний контур*** равно $e_1=\sum_{i=1}^{s}(t_i-1)$=$\sum_{i=1}^{s}t_i-s$, а ***в нашем конкретном случае - 25***. При подсчёте суммарного количества сторон всех элементарных многоугольников каждое ребро внешнего контура, являющееся стороной одного элементарного многоугольника, считается один раз, а каждое ребро графа не из внешнего контура, являющееся стороной для двух элементарных многоугольников, считается по два раза. Таким образом, если e_0 – количество внутренних рёбер, то имеем e_0+e_1= $n(n-2)$. Значит, e_1= $n(n-2)-e_0=n(n-2)-\sum_{i=1}^{s}t_i+s$. А суммарное количество сторон всех элементарных многоугольников равно $2e_0+e_1=2n(n-2)-+\sum_{i=1}^{s}t_i+s$. ***В нашем случае суммарное количество сторон всех элементарных многоугольников равно*** $\mathbf{2\cdot 10\cdot 8-25=135.}$

Вершина А внешнего контура образуется при пересечении двух прямых, и к вершине примыкает четыре многоугольные области. Возможны такие варианты:

1) Ровно одна многоугольная область лежит внутри внешнего контура. Тогда угол при вершине А меньше 180 градусов, и такая вершина А выпукла. Остальные три многоугольные области лежат за пределами внешнего контура и являются неограниченными. Им соответствует тройка чисел в векторе внешнего цикла, идущих подряд, причём среднее число в этой тройке равно 1.

2) Ровно две многоугольные области лежат внутри внешнего контура. Из соображений связности ясно, что тогда эти области соседние, угол при вершине А равен 180 градусов, а двум другим областям, которые в этом случае не ограничены, соответствует пара соседних чисел в векторе внешнего цикла, больших, чем 1.

3) Ровно три многоугольные области лежат внутри внешнего контура. Тогда угол при вершине А больше 180 градусов, и такая вершина А обратна. А у четвёртой неограниченной области вершина А является концом для двух элементарных отрезков внешнего контура, и поэтому при обходе вершин этой области вершина А не является крайней.

Из предыдущего следует, что выпуклые вершины те и только те, которые являются вершиной неограниченной области с одной вершиной. Обратные вершины – те и только те, которые являются вершинами неограниченных областей с числом вершин, больше, чем 2, и не являющиеся крайними в них. Так что количество выпуклых вершин равно v_1 - количеству единичных компонент вектора внешнего цикла. ***В нашем конкретном случае количество выпуклых вершин равно 6.*** А количество обратных вершин равно $v_2 = \sum_{i:t_i>2}(t_i - 2)$. ***В нашем конкретном случае количество обратных вершин равно 11.***

Далее, концы сторон внешнего контура являются либо выпуклыми вершинами либо обратными вершинами. Так что ***количество сторон внешнего контура равно*** сумме их количеств: $v = v_1 + v_2$. В нашем ***конкретном случае*** $\boldsymbol{v = 6 + 11 = 17}$.

Далее, если между двумя последовательно встречающихся единицами в векторе внешнего цикла есть хотя бы одно число, большее, чем 2, то между соответствующими выпуклыми вершинами есть хотя бы одна обратная вершина, и потому такой паре последовательно встречающихся единиц соответствует впадина. А общее количество впадин равно количеству тех промежутков между двумя соседними единицами в векторе внешнего цикла, которые содержат хотя бы одну компоненту, больше чем 2. ***В нашем случае количество впадин равно 6.***

Вершинами выпуклой оболочки могут быть только выпуклые вершины внешнего контура, не обязательно каждая из них. Так что для количества N вершин (и количества сторон) выпуклой оболочки справедлива оценка

$$3 \leq N \leq v_1.$$

В нашем случае оценка имеет вид

$$3 \leq N \leq 6.$$

Чтобы понять, какие значения, удовлетворяющие оценке, реализуются, рассмотрим конкретные случаи расположения прямых.