О. Полубасов. 4.04.12

========= 160 ==========

ММ160 (ТГ-5) (10 баллов)

На множестве натуральных чисел от 1 до 10460353203 структура графа G задается так: вершины a и b смежны <=> множества цифр в g-ичной записи чисел a и b различны при любом натуральном g >= 2.

Является ли G:

a) двудольным;

b) связным;

c) ациклическим?

d) Чему равна степень вершины 3?

e) Есть ли в G вершины, степень которых больше чем 10000000000?

---

1. Вспомогательные теоремы

Теорема 1. Если g-ичная запись числа состоит только из цифр a, то число делится на a.

Теорема тривиальна, но нужна, чтобы на неё ссылаться.

Теорема 2. Если b > a, b не кратно a, то для определения смежности вершин a и b достаточно проверить только основания $g \le a$.

Доказательство. Если g > a, то в g-ичной системе число a записывается как $a_{(g)}$. Если бы все цифры в записи b были равны a, то, по теореме 1, b делилось на a. Но, по условию, b не кратно a.

Теорема 3. Если $a < b \le a^2+a$, то для определения смежности вершин a и b достаточно проверить только основания $g \le a$.

Доказательство. Если g > a, то в g-ичной системе число a записывается как $a_{(g)}$, а число b – как одно- или двухзначное число, одна из цифр которого не равна a. Действительно, $a_{(g)} = a < b \le a^2+a < ag + a = aa_{(g)}$.

Теорема 4. Если $b > a^2+a$, b кратно a, то вершины a и b не смежны.

Доказательство. Положим $g = b/a – 1$, тогда $g > a$, $b = ag + a$. В g-ичной системе число a записывается как $a_{(g)}$, а число b – как $aa_{(g)}$.

Следствие. Вершина 1 смежна только с вершиной 2.

2. Выяснение двудольности графа G

В двоичной записи натурального числа возможны только два множества цифр: {1} и {0, 1}, поэтому все вершины естественным образом распределяются на две доли. Первую долю составляют числа вида 2^k-1, k = 1..33, а вторую – все остальные числа. Таким образом, граф двудольный. Так как первая доля содержит всего 33 вершины, исследование структуры графа заметно упрощается.

Для удобства, введём обозначения:
$I_i = 2^i - 1$, $i = 1..33$ (вершины первой доли),
F(a, g) - множество цифр в g-ичной записи числа a.

Чтобы нагляднее представить себе структуру графа G, составим табличку $F(I_i, g)$ для небольших g.

	3	4	5	6	7
I_1	1	1	1	1	1
I_2	01	3	3	3	3
I_3	12	13	12	1	01
I_4	012	3	03	23	12
I_5	01	13	1	15	34
I_6	012	3	23	134	012
I_7	012	13	012	13	124
I_8	01	3	012	013	135
I_9	012	13	0124	12	013
I_{10}	012	3	0134	234	126
I_{11}	012	13	1234	1235	356
I_{12}	012	3	01234	0345	0146
I_{13}	012	13	0123	0135	1236
I_{14}	012	3	013	0235	2356
I_{15}	12	13	023	14	013456
I_{16}	012	3	0124	123	01236
I_{17}	012	13	1234	01245	013456
I_{18}	012	3	01234	1345	01246
I_{19}	012	13	1234	1235	12345
I_{20}	012	3	023	02345	012356
I_{21}	012	13	0124	01245	01235
I_{22}	012	3	0234	0235	0123456
I_{23}	012	13	1234	0145	012345
I_{24}	012	3	01234	12345	01246
I_{25}	012	13	01234	01345	1235
I_{26}	012	3	01234	012345	12346
I_{27}	012	13	01234	012345	012356
I_{28}	012	3	01234	02345	1346
I_{29}	012	13	01234	01235	01236
I_{30}	012	3	1234	012345	01345
I_{31}	012	13	01234	01235	012346
I_{32}	012	3	01234	01345	012345
I_{33}	012	13	01234	012345	0123456

Таблица 1. $F(I_i, g)$ для $3 \le g \le 7$.

3. Выяснение связности графа G

Теорема 5. Вершина 2 смежна со всеми вершинами первой доли (и это единственная вершина с таким свойством, так как вершина 1 – висячая).

Доказательство. При $g=2$ множества цифр различны по определению долей. А так как все числа первой доли нечётны, то, по теореме 2, они все смежны с 2.

Следствие 1. Если G граф окажется несвязным, то он состоит из одной большой компоненты связности и изолированных вершин из второй доли.

Следствие 2. Длина кратчайшего пути между двумя любыми вершинами первой доли равна 2.

Следствие 3. Диаметр большой компоненты связности может быть только в пределах от 2 до 4.

Для поиска какой-нибудь изолированной вершины v воспользуемся таблицей 1. Видно, что для большинства вершин первой доли $F(I_i, 3) = \{0, 1, 2\}$, поэтому имеет смысл положить $F(v, 3) = \{0, 1, 2\}$. Если при этом троичная запись числа v будет заканчиваться нулём, то при $v > 12$, по теореме 4, v не будет смежна и с вершиной 3.

Остались 4 вершины: I_3, I_5, I_8 и I_{15}. Три из них можно отфильтровать, если положить $F(v, 4) = \{1, 3\}$. При этом, так как v кратно 3, то, по признаку делимости на 3 при основании 4, сумма цифр 4-ичной записи числа должна быть кратна 3, то есть содержать кратное трём количество единиц.

Наименьшее число с таким свойством – $1113_{(4)} = 87_{(10)}$. По удачному совпадению, $F(87, 7) = \{1, 3, 5\} = F(I_8, 7)$, поэтому вершина 87 не смежна и с I_8.

$87_{(10)} = 10020_{(3)} = 1113_{(4)} = 153_{(7)}$, так что вершина 87 изолированная, а граф G не связен.

По грубым прикидкам, G содержит около десяти тысяч изолированных вершин, например, в пределах первой тысячи - это 87, 375, 501 и 885.

Теорема 6. Диаметр большой компоненты связности равен 4.

Доказательство. $F(55, 3) = \{0, 1, 2\}$, $F(55, 4) = \{1, 3\} = F(I_3, 4) = F(I_5, 4) = F(I_{15}, 4)$, $F(55, 5) = \{0, 1, 2\} = F(I_8, 5)$, поэтому вершина 55 может быть смежна только с $I_2 = 3$. По теореме 2, эти вершины смежны.

$F(213, 3) = \{0, 1, 2\}$, $F(213, 4) = \{1, 3\} = F(I_3, 4) = F(I_5, 4) = F(I_{15}, 4)$, $F(213, 70) = \{3\} = F(I_2, 70)$, поэтому вершина 213 может быть смежна только с $I_8 = 255$. По теореме 2, эти вершины смежны (необходимо проверить основания $g \leq 213$).

Таким образом, кратчайший путь между вершинами 55 и 213 имеет длину 4: 55 - I_2 - 2 - I_8 - 213. В то же время, по следствию 3 из теоремы 5, более длинного кратчайшего пути быть не может.

Теорема 7. Вершина 4 смежна со всеми вершинами первой доли, кроме 1.

Доказательство. При $g=2$ множества цифр различны по определению долей.

F(4, 3) = {1}. Проверка по таблице показывает, что при k > 1 ни одно из F(I_k, 3) не равно {1} (впрочем, это легко доказывается для любых чисел вида 2^k-1).

F(4, 4) = {0, 1}, в то время как записи всех чисел первой доли вида 2^{2k} - 1, k = 1..16 состоят только из 3, а записи всех чисел первой доли вида 2^{2k+1} - 1, k = 1..16 ещё содержат ведущую единицу, нулей нет.

Все числа первой доли нечётны, поэтому, по теореме 2, они все смежны с 4 (кроме 1).

Следствие. Граф G не ациклический, так как уже обнаружилось много циклов вида (2, I_i, 4, I_j), 1 < i < j, например: (2, 3, 4, 7).

Теорема 8. Граф G не планарен.

Доказательство. Тройка вершин (2, 4, 6) попарно смежна с тройкой (3, 7, 15), так что эти вершины образуют граф Куратовского $K_{3,3}$, который не планарен.

4. Подсчёт количества чисел с заданным набором цифр

В этом разделе будем рассматривать только натуральные числа, состоящие из цифр заданного набора F = {f_1,..,f_k}. Если набор не содержит 0, то количество таких чисел равно k^m, где m – количество разрядов.

Пусть.

L(m, k) – количество m-разрядных натуральных чисел, содержащих ровно k различных цифр, ни одна из которых не 0, m ≥ k.

N(m, k) – количество не более чем m-разрядных натуральных чисел, содержащих ровно k различных цифр, ни одна из которых не 0, m ≥ k.

N0(m, k) – количество не более чем m-разрядных натуральных чисел, содержащих ровно k различных цифр, среди которых есть 0, m ≥ k.

Теорема 9. $L(m,k) = k^m + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i C_k^i (k-i)^m$.

Доказательство. Сначала найдём количество чисел, в которых отсутствуют i данных цифр из набора (а остальные могут как отсутствовать, так и присутствовать). В этом случае отсутствующие цифры можно выбрать C_k^i способами, а из остальных цифр можно составить $(k\text{-}i)^m$ чисел. Попеременным включением – исключением получим размер искомого множества.

Очевидно, что N(m, k) = $\sum_{i=k}^{m} L(i,k)$.

Теорема 10. N0(m, k) = L(m, k) – N(m-1, k-1).

Доказательство. Если набор цифр содержит 0, то в цепочке из m цифр могут оказаться ведущие нули, поэтому формула из теоремы 9 учтёт не только m-разрядные числа, но и все числа меньшей разрядности. Из подсчёта необходимо исключить числа, не содержащие 0. Таких чисел ровно N(m-1, k-1).

В частности:
$N(m, 1) = m$,
$N0(m, 2) = 2^m – m – 1$,
$N(m, 2) = 2^{m+1} – 2m – 2$,
$N0(m, 3) = 3^m – 2^{m+2} + 2m + 3$.

5. Мощности отношений несмежности

Введём обозначения.
M(a) – множество вершин, не смежных с вершиной a.
M(a, 1) – множество вершин b, не смежных с вершиной a по теореме 4, то есть $b > a^2+a$, b кратно a.
M(a, g), $2 \le g \le a$ – множество вершин b, не смежных с вершиной a из-за того, что F(b, g) = F(a, g). Условимся вершину a в это множество не включать.

Теорема 11. $M(a) = \bigcup_{g=1}^{a} M(a, g)$.
Утверждение следует из теорем 2 – 4.

Пусть HBound – верхняя граница диапазона рассматриваемых чисел.
Если HBound = $g^m – 1$, |F(a, g)| = k, то
|M(a, g)| = N(m, k) - 1, если в наборе нет 0,
|M(a, g)| = N0(m, k) - 1, если в наборе есть 0.
В противном случае, подходящих чисел может оказаться меньше.
Если m = $\lfloor \log_g HBound \rfloor$ + 1, |F(a, g)| = k, то
N(m-1, k) - 1 ≤ |M(a, g)| ≤ N(m, k) - 1, если в наборе нет 0,
N0(m-1, k) - 1 ≤ |M(a, g)| ≤ N0(m, k) - 1, если в наборе есть 0.

6. Вычисление степени вершины 3

Автор задачи в качестве HBound назначил 10460353203 = 3^{21}, поэтому при g = 3, 3^3 и 3^7 выгоднее отдельно рассмотреть вершину 3^{21}, чем добавлять разряд.
$|M(3, 1)| = (3^{21} – 3(3+1))/3 = 3^{20} – 4$.
F(3, 2) = {1}, поэтому |M(3, 2)| = N(33, 1) – 1 = 32.
F(3, 3) = {0, 1}, поэтому |M(3, 3)| = N0(21, 2) – 1 + 1 = $2^{21} – 21$ (с учетом вершины 3^{21}).
$|M(3,1) \cap M(3,2)|$ = 15.
$|M(3,1) \cap M(3,3)|$ = $2^{20} – 3 + 1$ (исключаются 3, 9 и 12).
$|M(3,2) \cap M(3,3)|$ = 2 (вершины 31 и 255).
$|M(3,1) \cap M(3,2) \cap M3,3)|$ = 1 (вершина 255).
$|M(3)| = |M(3,1)| + |M(3,2)| + |M(3,3)| - |M(3,1) \cap M(3,2)| - |M(3,1) \cap M(3,3)| - |M(3,2) \cap M(3,3)| + |M(3,1) \cap M(3,2) \cap M3,3)|$ = $(3^{20} – 4) + 32 + (2^{21} – 21) – 15 – (2^{20} - 2) – 2 + 1 = 3487832970$.
Следовательно, степень вершины 3 равна 10460353202 - 3487832970 = 6972520232.

7. Поиск вершин большой степени

Понятно, что вершины большой степени надо искать среди вершин первой доли. Чтобы степень вершины оказалась больше 10000000000, необходимо чтобы число не смежных с ней вершин, отличных от неё, было меньше 10460353203 – 10000000000 – 1= 460353202.

Для большинства вершин первой доли $F(I_k, 3) = \{0, 1, 2\}$, поэтому для них уже $|M(I_k, 3)| = N0(21, 3) – 1 = 3^{21} – 2^{23} – 2*21 + 2 > 460353202$.

Под подозрением остались 4 вершины: I_3, I_5, I_8 и I_{15}.

Для вершины $I_3 = 7$ уже $|M(7, 1)| = \lfloor(3^{21} - 7(7 + 1))/7\rfloor > 460353202$.

8. Оценка степени вершины 31

А вот у вершины $I_5 = 31$ все множества $F(31, g)$ при $g \le 31$ очень удачно оказались не более чем двухэлементными (таб. 2).

g	**F(31,g)**	$\lfloor\log_g(3^{21})\rfloor + 1$	**|M(31,g)|**	
1	-	-	$= \lfloor(3^{21} - 31(31 + 1))/31\rfloor$	337430716
2	{1}	33*	= N(33, 1) – 1	32
3	{0, 1}	21*	$= N0(21, 2) – 1 + 1 = 2^{21} – 21$	2097131
4	{1, 3}	17	$\le N(17, 2) – 1 = 2^{18} – 37$	262107
5	{1}	15	$\le N(15, 1) – 1$	14
6	{1, 5}	13	$\le N(13, 2) – 1 = 2^{14} – 29$	16355
7	{3, 4}	12	$\le N(12, 2) – 1 = 2^{13} – 27$	8165
8	{3, 7}	12	$\le N(12, 2) – 1 = 2^{13} – 27$	8165
9	{3, 4}	11	$\le N(11, 2) – 1 = 2^{12} - 25$	4071
10	{1, 3}	11	$\le N(11, 2) – 1 = 2^{12} - 25$	4071
11	{2, 9}	10	$\le N(10, 2) – 1 = 2^{11} – 23$	2025
12	{2, 7}	10	$\le N(10, 2) – 1 = 2^{11} – 23$	2025
13	{2, 5}	9	$\le N(9, 2) – 1 = 2^{10} – 21$	1003
14	{2, 3}	9	$\le N(9, 2) – 1 = 2^{10} – 21$	1003
15	{1, 2}	9	$\le N(9, 2) – 1 = 2^{10} – 21$	1003
16	{1, 15}	9	$\le N(9, 2) – 1 = 2^{10} – 21$	1003
17	{1, 14}	9	$\le N(9, 2) – 1 = 2^{10} – 21$	1003
18	{1, 13}	8	$\le N(8, 2) – 1 = 2^9 – 19$	493
19	{1, 12}	8	$\le N(8, 2) – 1 = 2^9 – 19$	493
20	{1, 11}	8	$\le N(8, 2) – 1 = 2^9 – 19$	493
21	{1, 10}	8	$\le N(8, 2) – 1 = 2^9 – 19$	493
22	{1, 9}	8	$\le N(8, 2) – 1 = 2^9 – 19$	493
23	{1, 8}	8	$\le N(8, 2) – 1 = 2^9 – 19$	493
24	{1, 7}	8	$\le N(8, 2) – 1 = 2^9 – 19$	493
25	{1, 6}	8	$\le N(8, 2) – 1 = 2^9 – 19$	493
26	{1, 5}	8	$\le N(8, 2) – 1 = 2^9 – 19$	493
27	{1, 4}	7*	$= N(7, 2) – 1 = 2^8 – 17$	239
28	{1, 3}	7	$\le N(7, 2) – 1 = 2^8 – 17$	239
29	{1, 2}	7	$\le N(7, 2) – 1 = 2^8 – 17$	239
30	{1}	7	$\le N(7, 1) – 1$	6
31	{0, 1}	7	$< N0(7, 2) – 1 = 2^7 – 8$	120

Таблица 2. Оценки |M(31,g)| сверху.

Примечание. При g = 2, 3 и 27 значения в столбце 3 уменьшены на 1. Так как из всех g, представленных в таблице, число 3^{21} делится только на 3 и 27, то смежность просто проверена. $F(3^{21}, 3) = F(31,3)$, $F(3^{21}, 27) \neq F(31,27)$. M(,2) нам известны по разделению на доли.

$|M(31)| = \left|\bigcup_{g=1}^{31} M(31,g)\right| \leq \sum_{g=1}^{31}|M(31,g)| \leq$ 339845172, что меньше чем 460353202.

Поэтому степень вершины 31 больше чем 10460353202 – 339845172 = 10120508030.

Собственно, вся эта «ловля блох» понадобилась, только чтобы убедиться, что основной вклад в сумму дают несколько первых слагаемых (в данном случае, g=1 и g=3), а весь «хвост» можно отбросить, оценив его сумму сверху.

9. Оценка степени вершины 255

Теорема 12. $N0(m,k) < k^m$.

Доказательство. Действительно, набор чисел, у которого каждая цифра пробегает все k возможных значений (включая 0), содержит все числа с заданным множеством цифр, в том числе, всех возможных длин, но кроме этого ещё содержит много чисел с неполными множествами цифр.

Теорема 13. $N(m,k) < k^{(m+1)}/(k-1)$, $k > 1$.

Доказательство. Набор чисел, у которого каждая цифра пробегает все k возможных значений (0 не входит в множество), содержит все числа длины m с заданным множеством цифр. Чтобы учесть числа меньшей длины, необходимо рассмотреть наборы меньшей длины (но не меньше k).

Так как $\sum_{i=1}^{m} k^i = \frac{k^{m+1}-1}{k-1}$, то $N(m,k) < \frac{k^{m+1}-k^k}{k-1}$.

Поэтому, рассматривая $I_8 = 255$, для оценки N0(m,k) будем использовать k^m, а для оценки N(m,k) (при k > 1) - $k^{(m+1)}/(k-1)$ (таб. 3).

g	**F(255,g)**	$\lfloor \log_g(3^{21}) \rfloor + 1$	**|M(255,g)|**	
1	-	-	$= \lfloor (3^{21} - 255(255+1))/255 \rfloor$	41020736
2	{1}	33*	= N(33, 1) – 1	32
3	{0 1}	21*	$= N0(21, 2) - 1 + 1 = 2^{21} - 21$	2097131
4	{3}	17	≤ N(17, 1) – 1	16
5	{0 1 2}	15	$\leq N0(15, 3) < 3^{15}$	14348907
6	{0 1 3}	13	$\leq N0(13, 3) < 3^{13}$	1594323
7	{1 3 5}	12	$\leq N(12, 3) < 3^{13}/2$	797161
8	{3 7}	12	$\leq N(12, 2) < 2^{13}$	8192
9	{1 3}	11	$\leq N(11, 2) < 2^{12}$	4096
10	{2 5}	11	$\leq N(11, 2) < 2^{12}$	4096
11	{1 2}	10	$\leq N(10, 2) < 2^{11}$	2048
12	{1 3 9}	10	$\leq N(10, 3) < 3^{11}/2$	88573

13	{1 6 8}	9	$\leq$ N(9, 3) < $3^{10}/2$	29524
14	{1 3 4}	9	$\leq$ N(9, 3) < $3^{10}/2$	29524
15	{0 1 2}	9	$\leq$ N0(9, 3) < 3^9	19683
16	{15}	9	$\leq$ N(9, 1) – 1	8
17	{0 15}	9	$\leq$ N0(9, 3) < 3^9	19683

Таблица 3. Оценки |M(255,g)| сверху.

При $18 \leq g \leq 255$ все множества F(255, g) не более чем двухэлементны, а разрядность чисел не превышает 8, поэтому оставшаяся сумма меньше чем $(255 - 17)2^9 = 121856$.

Общая сумма составила 60185589, что существенно меньше, чем у вершины 31, хотя использовались более грубые оценки. Степень вершины 255 больше чем 10460353202 – 60185589 = 10400167613.

10. Оценка степени вершины 32767

F(32767, 7) = {0, 1, 3, 4, 5, 6},
$3^{21} = 520134351366_{(7)}$.

По теореме 10:
N0(11, 6) = L(11, 6) – N(10, 5) = 129230640 – 6081840 = 123148800,
N0(12, 6) = L(12, 6) – N(11, 5) = 953029440 – 35689440 = 917340000.

Так как 123148800 – 1 < 460353202 < 917340000 – 1, то для оценки степени вершины 32767 необходимо привлечь более тонкие критерии, например, обратить внимание на первую цифру записи $520134351366_{(7)}$.

Из шести допустимых цифр {0, 1, 3, 4, 5, 6} в старшем разряде оставим четыре: {0, 1, 3, 4}.

В формуле теоремы 10 возможное количество допустимых цифр в старшем разряде записи числа влияет на первый член (L), но не влияет на второй (N), поэтому можно применить грубую оценку: $|M(32767, 7)| \geq \frac{4}{6}L(12, 6) - N(11, 5) - 1 = 635352960 - 35689440 - 1 = 599663519 > 460353202$.

Следовательно, степень вершины 32767 меньше чем 10000000000.

ОТВЕТ. Граф двудольный, несвязный, не ациклический, не планарный, состоит из одной большой компоненты связности и многих изолированных вершин, диаметр большой компоненты связности равен 4.

Степень вершины 3 равна 6972520232.

Степени вершин 31 и 255 больше чем 10000000000, степени остальных вершин меньше чем 10000000000. Максимальную степень имеет вершина 255.