О. Б. Полубасов   20.04.2013 г.

========= 171 ==========

ММ171 (А-1) (5 баллов)

Решения принимаются, по крайней мере, до 22.04.13

Вася, Петя, Коля и Федя хвалились параллелепипедами, которые они склеили из единичных кубиков. Васин параллелепипед имел размеры $a \times b \times c$. Петин - $(a+1) \times b \times c$, Колин - $(a+1) \times (b+1) \times c$, а Федин - $(a+1) \times (b+1) \times (c+1)$.

- Зато у моего параллелепипеда диагональ целочисленная - сказал Вася.
- Подумаешь! У моего тоже диагональ целочисленная - заявил Петя.
- И у моего - заметил Коля.
- И у моего тоже - не отстал от товарищей Федя.

Найти максимально возможное количество честных среди перечисленных мальчиков.

=======================

Запишем условие задачи.

$a^2 + b^2 + c^2 = x^2.$
$(a+1)^2 + b^2 + c^2 = y^2.$
$(a+1)^2 + (b+1)^2 + c^2 = z^2.$
$(a+1)^2 + (b+1)^2 + (c+1)^2 = w^2.$

Рассмотрим пару (Вася, Петя). Пусть $y = x + d$, d нечётно.

Тогда $2a + 1 = 2dx + d^2 \geq 2x + 1$.

Тогда $a \geq x$. Но диагональ должна быть длиннее любой стороны. Следовательно, хотя бы один мальчик из этой пары не честен.

Аналогичные рассуждения можно провести для пар (Петя, Коля) и (Коля, Федя).

Рассмотрим пару (Вася, Коля). Пусть $z = x + d$, d чётно.

Тогда $2a + 2b + 2 = 2dx + d^2 \geq 4x + 4$.

Тогда $a + b \geq 2x + 2$. Но диагональ должна быть длиннее любой стороны. Следовательно, хотя бы один мальчик и из этой пары не честен.

Аналогичные рассуждения можно провести для пары (Петя, Федя).

Рассмотрим пару (Вася, Федя). Пусть $w = x + d$, d нечётно.

Тогда $2a + 2b + 2c + 3 = 2dx + d^2$.

Если $d \geq 3$, то $2dx + d^2 \geq 6x + 9$, то есть $a + b + c \geq 3x + 3$. Но диагональ должна быть длиннее любой стороны.

Пусть $d = 1$.

Тогда $2a + 2b + 2c + 3 = 2x + 1$, то есть $x = a + b + c + 1$, $w = x + 1$.

$a^2 + b^2 + c^2 = x^2 = (a + b + c + 1)^2$.

Квадрат суммы положительных чисел всегда больше суммы квадратов.

Следовательно, хотя бы один мальчик и из этой пары не честен.

В то же время, натуральные четвёрки вида $a^2 + b^2 + c^2 = x^2$ существуют, поэтому один из мальчиков мог сказать правду.

Например, возьмём произвольные a и b разной чётности.

Пусть $c = (a^2 + b^2 – 1)/2$, $x = c + 1$, тогда $a^2 + b^2 + c^2 = x^2$. Наименьшая из таких четверок – (1, 2, 2, 3).

Ответ. Максимально возможное количество честных мальчиков равно 1, причём честным может оказаться любой из них.

Мальчики явно со странностями. Они умеют вычислить длину диагонали параллелепипеда, но при этом клеят параллелепипеды из кубиков и хвастаются ими. ☺