О. Б. Полубасов 29.04.2013 г.

========= 172 ==========

MM172 (A-2) (5 баллов)

Решения принимаются, по крайней мере, до 29.04.13

Доказать, что существует бесконечно много хитовых abc-троек, таких что c является степенью пятерки.

Примечание:
Тройка натуральных чисел a, b, c называется хитовой abc-тройкой, если a + b = c, GCD(a,b) = 1 и c > rad(abc).
Примечание к примечанию:
Пусть $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$, тогда $rad(n) = p_1 \dots p_k$.

=====================

Пусть p и q – взаимно простые числа, большие 1, a = p^n, c = q^m, a < c. Тогда число b = c – a взаимно просто как с числом a, так и с числом c.

Не будем возиться с разложением b на простые множители, а просто заметим, что rad(b) ≤ b, поэтому rad(abc) ≤ pqb.

Если c > pqb, то c > rad(abc), а значит, эта тройка хипповая.

Положим $n = \lfloor m * \log_p q \rfloor$, где $\lfloor \ \rfloor$ – целая часть числа. Тогда a < c. Чтобы тройка была китовой, достаточно выполнить: $\frac{b}{c} < \frac{1}{pq}$, то есть, $\frac{c-a}{c} < \frac{1}{pq}$, то есть, $1 - \frac{a}{c} < \frac{1}{pq}$, то есть, $\frac{a}{c} > \frac{pq-1}{pq}$, то есть, $\frac{p^{\lfloor m*\log_p q \rfloor}}{q^m} > \frac{pq-1}{pq}$, то есть, $\frac{1}{p^{\{m*\log_p q\}}} > \frac{pq-1}{pq}$, то есть, $p^{\{m*\log_p q\}} < \frac{pq}{pq-1}$, то есть, $\{m * \log_p q\} < \log_p \frac{pq}{pq-1}$, где $\{ \ \}$ – дробная часть числа.

Для любых взаимно простых чисел p и q, больших 1, множество чисел, выражаемых левой частью неравенства, всюду плотно на интервале (0; 1), а значение правой части лежит в этом интервале, поэтому неравенство выполняется для бесконечного множества значений m.

Конечно, таким методом мы не получим все хитиновые тройки, но этого в задаче и не требуется. Подчеркнём, что утверждение верно для всех c, являющихся степенью любого целого числа, большего 1, а не только для степени пятёрки.

Пример.
Пусть p = 2, q = 5.
$\log_2 5 \cong 2.321928$, $\log_2 \frac{10}{9} \cong 0.152003$.
$\{16*\log_2 5\} \cong 0.150850$,
$\{19*\log_2 5\} \cong 0.116634$,
$\{22*\log_2 5\} \cong 0.082418$,

$\{25*\log_2 5\} \cong 0.048202$,
$\{28*\log_2 5\} \cong 0.013987$,
$\{47*\log_2 5\} \cong 0.130620$,
$\{50*\log_2 5\} \cong 0.096405$,
$\{53*\log_2 5\} \cong 0.062189$,
$\{56*\log_2 5\} \cong 0.027973$,
$\{75*\log_2 5\} \cong 0.144607$,
$\{78*\log_2 5\} \cong 0.110391$,
$\{81*\log_2 5\} \cong 0.076176$,
$\{84*\log_2 5\} \cong 0.041960$,
$\{87*\log_2 5\} \cong 0.007744$.

Проверка.
$c = 5^{16} = 152587890625$,
$a = 2^{37} = 137438953472$,
$b = c – a = 15148937153$,
$rad(abc) \leq 151489371530 < c$.

Ответ. Утверждение доказано.