О. Б. Полубасов    20.06.2013 г.

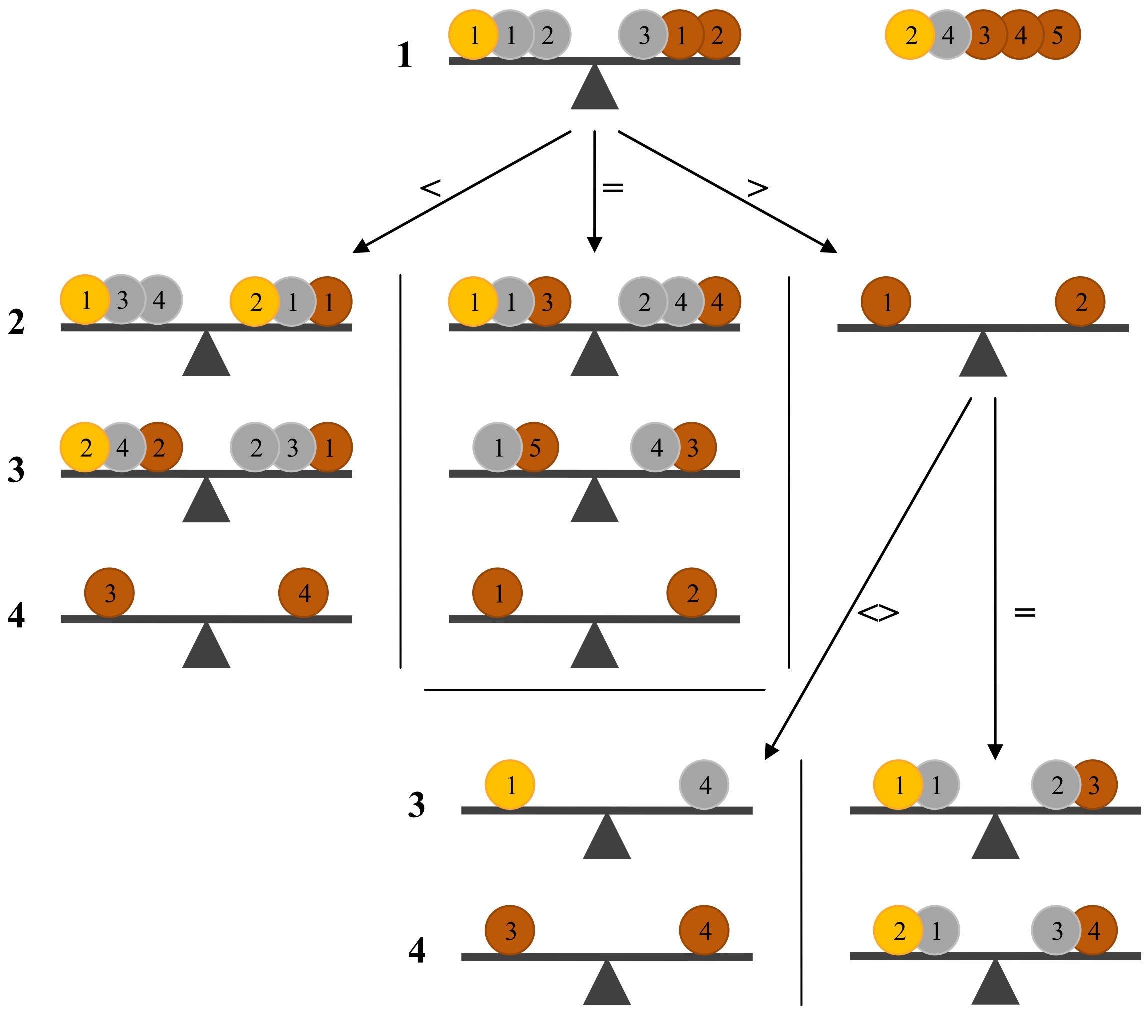
========= 179 ==========

ММ179 (10 баллов)

Решения принимаются, по крайней мере, до 25.06.13

Имеется 11 монет: 2 золотых; 4 серебряных; 5 бронзовых.
Известно, что одна золотая, одна серебряная и 2 бронзовых монеты - фальшивые.
Все настоящие монеты равны по весу.
Все фальшивые тоже равны по весу, но легче настоящих.
Золотые, серебряные и бронзовые отличаются друг от друга по внешнему виду.
За четыре взвешивания на чашечных весах без гирь определить фальшивые монеты.
=========================

**Ответ.** Схема взвешиваний может быть, например, такой.



## Обоснование

Определение фальшивых монет по результатам взвешиваний приведено в таблицах 1-3. Нетрудно убедиться, что в таблицах встречаются все возможные комбинации фальшивых монет по одному разу. А так как каждая комбинация (из 80) даёт ровно один исход взвешиваний (из 81), то, по теореме Дирихле, каждый исход взвешиваний (кроме =, >, <, =) соответствует ровно одной комбинации фальшивых монет.

| результаты взвешиваний | | | | фальшивые монеты | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | золото | серебро | бронза |
| < | < | < | < | 1 | 4 | 3, 5 |
| | | | = | 1 | 4 | 3, 4 |
| | | | > | 1 | 4 | 4, 5 |
| | | = | < | 1 | 2 | 2, 3 |
| | | | = | 1 | 2 | 2, 5 |
| | | | > | 1 | 2 | 2, 4 |
| | | > | < | 1 | 2 | 3, 5 |
| | | | = | 1 | 2 | 3, 4 |
| | | | > | 1 | 2 | 4, 5 |
| | = | < | < | 1 | 1 | 2, 3 |
| | | | = | 1 | 1 | 2, 5 |
| | | | > | 1 | 1 | 2, 4 |
| | | = | < | 1 | 1 | 3, 5 |
| | | | = | 1 | 1 | 3, 4 |
| | | | > | 1 | 1 | 4, 5 |
| | | > | < | 1 | 2 | 1, 3 |
| | | | = | 1 | 2 | 1, 5 |
| | | | > | 1 | 2 | 1, 4 |
| | > | < | < | 2 | 1 | 3, 5 |
| | | | = | 2 | 1 | 3, 4 |
| | | | > | 2 | 1 | 4, 5 |
| | | = | < | 2 | 2 | 3, 5 |
| | | | = | 2 | 2 | 3, 4 |
| | | | > | 2 | 2 | 4, 5 |
| | | > | < | 1 | 1 | 1, 3 |
| | | | = | 1 | 1 | 1, 5 |
| | | | > | 1 | 1 | 1, 4 |

Таблица 1.

| результаты взвешиваний | | | | фальшивые монеты | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | золото | серебро | бронза |
| = | < | < | < | 2 | 1 | 1, 5 |
| | | | = | 1 | 1 | 1, 2 |
| | | | > | 2 | 1 | 2, 5 |
| | | = | < | 2 | 1 | 1, 3 |
| | | | = | 1 | 3 | 3, 5 |
| | | | > | 2 | 1 | 2, 3 |
| | | > | < | 1 | 4 | 1, 3 |
| | | | = | 1 | 3 | 3, 4 |
| | | | > | 1 | 4 | 2, 3 |
| | = | < | < | 2 | 1 | 1, 4 |
| | | | = | 1 | 3 | 4, 5 |
| | | | > | 2 | 1 | 2, 4 |
| | | = | < | 1 | 4 | 1, 5 |
| | | | = | 1 | 2 | 1, 2 |
| | | | > | 1 | 4 | 2, 5 |
| | | > | < | 2 | 2 | 1, 3 |
| | | | = | 2 | 4 | 3, 5 |
| | | | > | 2 | 2 | 2, 3 |
| | > | < | < | 2 | 2 | 1, 5 |
| | | | = | невоможно | | |
| | | | > | 2 | 2 | 2, 5 |
| | | = | < | 2 | 2 | 1, 4 |
| | | | = | 2 | 4 | 4, 5 |
| | | | > | 2 | 2 | 2, 4 |
| | | > | < | 1 | 4 | 1, 4 |
| | | | = | 2 | 4 | 3, 4 |
| | | | > | 1 | 4 | 2, 4 |

Таблица 2.

| результаты взвешиваний | | | | фальшивые монеты | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | золото | серебро | бронза |
| > | < | < | < | 1 | 3 | 1, 3 |
| | | | = | 1 | 3 | 1, 5 |
| | | | > | 1 | 3 | 1, 4 |
| | | = | < | 2 | 3 | 1, 3 |
| | | | = | 2 | 3 | 1, 5 |
| | | | > | 2 | 3 | 1, 4 |
| | | > | < | 2 | 4 | 1, 3 |
| | | | = | 2 | 4 | 1, 5 |
| | | | > | 2 | 4 | 1, 4 |
| | = | < | < | 2 | 1 | 1, 2 |
| | | | = | 1 | 4 | 1, 2 |
| | | | > | 1 | 3 | 1, 2 |
| | | = | < | 2 | 4 | 1, 2 |
| | | | = | 2 | 3 | 1, 2 |
| | | | > | 2 | 3 | 4, 5 |
| | | > | < | 2 | 2 | 1, 2 |
| | | | = | 2 | 3 | 3, 5 |
| | | | > | 2 | 3 | 3, 4 |
| | > | < | < | 1 | 3 | 2, 3 |
| | | | = | 1 | 3 | 2, 5 |
| | | | > | 1 | 3 | 2, 4 |
| | | = | < | 2 | 3 | 2, 3 |
| | | | = | 2 | 3 | 2, 5 |
| | | | > | 2 | 3 | 2, 4 |
| | | > | < | 2 | 4 | 2, 3 |
| | | | = | 2 | 4 | 2, 5 |
| | | | > | 2 | 4 | 2, 4 |

Таблица 3.

## Анализ

Так как всего возможно C(2, 1)*C(4, 1)*C(5, 2) = 80 комбинаций фальшивых монет, каждое взвешивание может иметь не более трёх исходов, а 4 взвешивания, значит, не более $3^4 = 81$ исходов, то 4 взвешивания необходимы, какие бы 4 монеты не оказались фальшивыми. Достаточность 4 взвешиваний показана в решении.

Возникает закономерный вопрос: можно ли эти 4 взвешивания выбрать заранее, сделав последующие взвешивания независимыми от результатов предыдущих? Оказывается, что нет. Из 108 возможных принципиально различных первых взвешиваний только одно (за что ведущему респект), а именно «ЗСС vs СББ», разбивает множество комбинаций на части, не большие $3^3 = 27$, а именно, 27, 26, 27. Все остальные варианты первого взвешивания имеют перекос в размерах частей. Не существует второго взвешивания, которое в совокупности с первым разбивало бы множество комбинаций на части, не большие 9. Поэтому выбор второго взвешивания обязан зависеть от результатов первого.

В то же время, в ветви «<» первого взвешивания возможно выбрать оставшиеся 3 взвешивания заранее, причём несколькими способами. То же самое верно и для ветви «=». А вот для ветви «>» таких наборов нет, в ветви «>» третье и четвёртое взвешивания необходимо выбирать по результатам второго (хотя удалось найти набор этих двух взвешиваний, общий для ветвей «>, <» и «>, >»).

В отличие от первого взвешивания, для остальных взвешиваний существует свобода выбора. Например, в ветви «<» вместо набора

З$_1$ С$_3$ С4 vs З$_2$ С$_1$ Б$_1$, З$_2$ С$_4$ Б$_2$ vs С$_2$ С$_3$ Б$_1$, Б$_3$ vs Б$_4$

можно было бы выбрать не эквивалентные ему наборы:

З$_2$ С$_1$ С$_3$ vs С$_4$ Б$_1$ Б$_2$, З$_2$ С$_2$ Б$_1$ vs С$_1$ С$_4$ Б$_2$, Б$_3$ vs Б$_4$;
З$_2$ С$_1$ С$_4$ vs С$_2$ Б$_1$ Б$_2$, З$_2$ С$_4$ Б$_1$ vs С$_1$ С$_3$ Б$_2$, Б$_3$ vs Б$_4$:
З$_2$ С$_1$ Б$_1$ vs С$_2$ С$_4$ Б$_2$, З$_2$ С$_4$ Б$_2$ vs С$_2$ С$_3$ Б$_1$, Б$_3$ vs Б$_4$.

Если не требовать априорного выбора набора взвешиваний, то вариантов, естественно, будет ещё больше.