О. Б. Полубасов   05.09.2014 г.

===========ММ191===============

ММ191 (4 балла)
Решения принимаются, по крайней мере, до 12.09.14

Рассматриваются тройки чисел $a \le b \le c$, не превосходящих данного натурального числа n. Каких троек больше, тех, которые могут быть длинами сторон некоторого треугольника, или остальных?

===========================

Все тройки натуральных чисел рассматриваемого вида можно разбить на три класса.

Класс L: a + b ≤ c. Тройка не образует треугольник.

Класс E: a + b = c + 1. Тройка образует треугольник.

Класс G: a + b ≥ c + 2. Тройка образует треугольник.

Между классами L и G существует одно-однозначное соответствие: (a, b, c) ⇔ (c–b+1, c–a+1, c), класс E при таком соответствии переходит сам в себя. Класс E содержит, по крайней мере, тройку (1, 1, 1), так что не пуст.

Ответ. Для любого n больше тех троек, которые могут быть длинами сторон треугольника.

Примечание 1.

Для каждого n тройку (a, b, c) можно выбрать $|L| + |E| + |G| = F(n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ способами, $|L| = |G| = \frac{F(n)}{2} - \frac{|E|}{2}$, $|G| + |E| = \frac{F(n)}{2} + \frac{|E|}{2}$.

При каждом нечётном c класс E содержит $E(c) = \frac{c+1}{2}$ элементов, а при каждом чётном c: $E(c) = \frac{c}{2}$ элементов. Суммируя по всем c ≤ n, получаем:

$|E| = \sum_{c=1}^{n} E(c) = \frac{n(n+2)}{4}$, n – чётно,

$|E| = \sum_{c=1}^{n} E(c) = \frac{(n+1)^2}{4}$, n – нечётно.

Так как |E| << F(n), то с ростом n отношение числа подходящих троек (a, b, c) к общему числу троек асимптотически приближается к 1/2 сверху, монотонно убывая.

Примечание 2.

В некоторых странах, например, во Франции, 0 считается натуральным числом. Применив соответствие: (a, b, c) ⇔ (c-b, c-a, c), можно убедиться, что в этом случае с ростом n отношение также асимптотически приближается к 1/2, но уже снизу, то есть ответ будет в точности противоположным.