ММ191.

Рассматриваются тройки чисел $a \leqslant b \leqslant c$, не превосходящих данного натурального числа n. Каких троек больше, тех, которые могут быть длинами сторон некоторого треугольника, или остальных?

Решение.

Больше тех троек, которые могут быть длинами сторон некоторого треугольника.

Найдём числовые значения при малых n.

Условие существования тиреугольника $a+b>c$

Пусть общее число троек при $n=k$: $S(k)$, количество троек, которые могут быть длинами сторон некоторого треугольника $S_1(k)$, а тех, которые не могут - $S_2(k)$, $\Delta(k)=S_1(k)-S_2(k)$.

$n=1$, одна тройка $(1,1,1)$, $S_1(1)=1$, $S_2(1)=0$, $\Delta(1)=1$.

При $n=2$ добавятся такие новые тройки $(1,1,2)$,$(1,2,2)$,$(2,2,2)$, из них две попадают в первую группу, а одна во вторую, т.е. $S(2)=4$, $S_1(2)=3$, $S_2(2)=1$, $\Delta(2)=2$.

При $n=3$ добавятся 6 троек с $c=3$, $S(3)=S(2)+6=10$, из них 4 в первой группе $(2,2,3)$,$(1,3,3)$,$(2,3,3)$, $(3,3,3)$, а 2 во второй - $(1,1,3)$,$(1,2,3)$, тогда $S_1(3)=3+4=7$, $S_2(3)=1+2=3$, $\Delta(3)=2+(4-2)=4$.

Следовательно, с ростом n значения $\Delta(n)$ монотонно возрастают. Докажем по индукции, база уже показана. Пусть при $n=k$ утверждение выполняется, в частности, тогда $S_1(k)>S_2(k)$, рассмотрим что происходит при переходе к $n=k+1$, добавятся тройки с $c=k+1$, при $a=k+1$ имеем одну тройку, при $a=k$ две и т.д., при $a=1$ будет $k+1$ тройка, всего появляется новых троек

$$1+2+3+...+k+(k+1)=\frac{(k+1)\,(k+2)}{2}$$

Теперь определим, сколько из этих троек относятся к каждой из групп.

При $a = 1$ *треугольник можно составить из одной тройки, а из* k *троек нельзя. При* $a = 2$, *треугольник составляется из* 2 *троек, а нельзя составить из* $k - 2$ *и т.д. до* $a = [(k+1)/2]$. *А если рассматривать тройки начиная с другой стороны, то треугольники можно составить из всех таких троек: при* $a = k + 1$ *получаем одну такую тройку, при* $a = k$ *- две и т.д.*

Тогда, при $k = 2p$ *количество троек второго типа (нельзя составить) будет равно*

$$2 + 4 + ... + (2p - 2) + 2p = \frac{2 + 2p}{2} p = p(p+1)$$

а при $k = 2p + 1$

$$1 + 3 + ... + (2p - 1) + (2p + 1) = \frac{1 + 2p + 1}{2}(p+1) = (p+1)^2$$

Количество троек, из которых можно составить треугольники:

- при $k = 2p$

$$1+2+...+p+(p+1)+p+...+2+1 = 2 \cdot \frac{1+p}{2} \cdot p + (p+1) = (p+1)^2$$

- при $k = 2p + 1$

$$1+2+...+p+(p+1)+(p+1)+p+...+2+1 = 2 \cdot \frac{1+p+1}{2} \cdot (p+1) = (p+1)(p+2)$$

Тогда когда количество троек первого типа больше количества троек второго на:

- при $k = 2p$

$$(p+1)^2 - p(p+1) = p + 1$$

- при $k = 2p + 1$

$$(p+1)(p+2) - (p+1)^2 = p + 1$$

Утверждение доказано.

Найдём числовые значения и некоторые соотношения.

$$S\left(n\right)=\frac{n\cdot\left(n+1\right)\cdot\left(n+2\right)}{6}$$

$$S_1\left(2p+1\right)=\frac{\left(p+1\right)\cdot\left(p+2\right)\cdot\left(4p+3\right)}{6}$$

$$S_1\left(2p\right)=\frac{p\cdot\left(p+1\right)\cdot\left(4p+5\right)}{6}$$

или

$$S_1\left(n\right)=\left[\frac{\left(n+1\right)\cdot\left(n+3\right)\cdot\left(2n+1\right)}{24}\right]$$

$$S_2\left(n\right)=S_1\left(n-1\right)$$

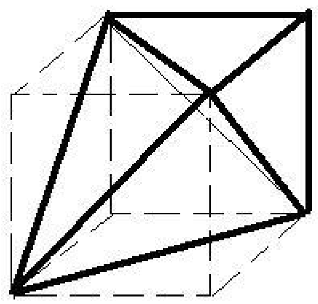
$$\Delta(n)=\left[\frac{\left(n+1\right)^2}{4}\right]$$

Интересно также найти вероятности того, что из чисел наугад взятой тройки можно (или нельзя) составить треугольник - при неограниченном росте n.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_1\left(n\right)}{S\left(n\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{S_2\left(n\right)}{S\left(n\right)}=\frac{1}{2}$$

В таком же вероятностном смысле можно рассматривать тройки уже не натуральных, а вещественных (положительных) чисел. В этом случае можно решить графически.

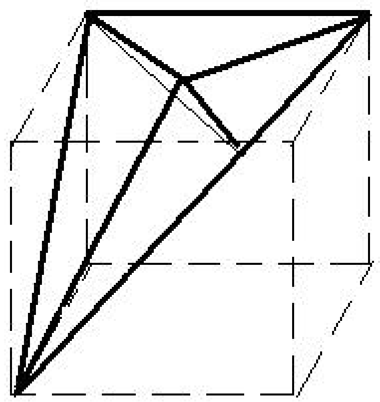
Рассмотрим куб $nXnXn$, начало координат в одной из вершин, рёбра кеуба лежат на осях координат (или параллельны им), сначала без учёта ограничений $a \leqslant b \leqslant c$, исходные тройки чисел заполняют весь объём данного куба, т.е. объём n^3. Среди них троки чисел, которые не удовлетворяют неравенству треугольника, расположены в одной из трёх пирамид. Следовательно, тройки чисел, из которых можно составить треугольник, будут находится внутри фигуры, оставшейся после “отрезания” от куба этих трёх (попарно не пересекающихся) пирамид, вот как на этом рисунке.



Объём каждой пирамиды равен $n^3/6$, *тогда вероятность того, что из чисел наугад взятой тройки можно (или нельзя) составить треугольник*

$$p = \frac{3n^3/6}{n^3} = \frac{1}{2}$$

Теперь учтём ограничения задачи $a \leqslant b \leqslant c$, *чертёж становится менее наглядным*



но на искомую вероятность это не повлияет $p = 0,5$