О. Б. Полубасов   18.09.2014 г.

===========MM192===============

MM192 (5 баллов)
Решения принимаются, по крайней мере, до 19.09.14

Рассматриваются целочисленные треугольники со сторонами, не превосходящими данного натурального числа n.
Каких треугольников больше: остроугольных или тупоугольных?

==========================

Пусть $1 \le a \le b \le c \le n$. Для начала, посмотрим асимптотику.

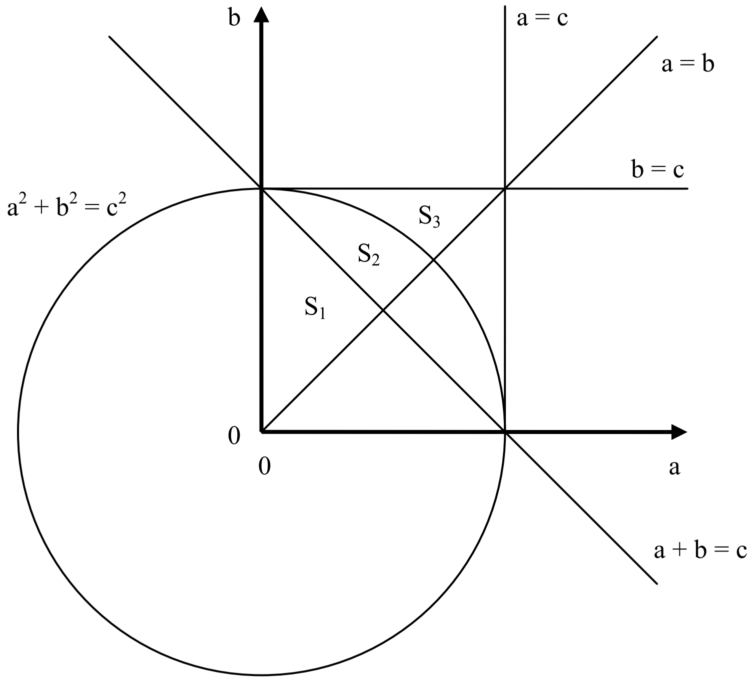

Рис. 1. S_1 – не треугольники, S_2 – тупоугольные, S_3 – остроугольные.

Суммарная площадь областей S_2 и S_3 равна $\frac{c^2}{4}$, площадь области S_2 равна $\frac{\pi c^2}{8} - \frac{c^2}{4} = \frac{(\pi-2)c^2}{8}$, отношение $\frac{S_2}{S_2+S_3} = \frac{\pi-2}{2} \cong 0.57$, что больше половины.

Теперь перейдём от непрерывных величин к дискретным. Пусть теперь S_2 – количество тупоугольных треугольников с наибольшей стороной c, а S_3 – количество не тупоугольных треугольников с наибольшей стороной c.

При малых n отношение количества тупоугольных треугольников к общему количеству треугольников с наибольшей стороной $c \le n$ меньше половины. Следовательно, с ростом n, где-то значение отношения пересекает линию 0.5. Непосредственным подсчётом убеждаемся, что это происходит при $n = 39$ (таб. 1).

n	троек	не треугольников	треугольников	тупоугольных	прямоугольных	остроугольных
1	1	0	1	0	0	1
2	4	1	3	0	0	3
3	10	3	7	1	0	6
4	20	7	13	2	0	11
…						
25	2925	1378	1547	715	8	824
26	3276	1547	1729	806	9	914
27	3654	1729	1925	906	9	1010
28	4060	1925	2135	1012	9	1114
…						
37	9139	4389	4750	2358	14	2378
38	9880	4750	5130	2555	14	2561
39	10660	5130	5530	2765	15	2750
40	11480	5530	5950	2986	16	2948
41	12341	5950	6391	3216	17	3158

Таблица. 1. Статистика троек.

Осталось доказать, что это пересечение единственно.

https://ru.wikipedia.org/wiki/Проблема_круга_Гаусса

Как показал Гаусс, внутрь круга радиусом r или на его границу попадает $N(r) \geq \pi r^2 - 2\sqrt{2}\pi r$ точек с целочисленными координатами. Нам надо оценить снизу количество точек внутри сектора $S_1 + S_2$, при этом точки на диагонали учитываются (кроме (0, 0)), а точки на оси b и точки на дуге – нет.

Чтобы не учитывать точки на дуге, положим r = c-1. Тогда на оси b будет c-1 целочисленная точка (не считая (0, 0)), а на диагонали – $\left\lfloor \frac{\sqrt{2}}{2}(c-1) \right\rfloor$ точек.

$N(r) = 8(S_1 + S_2) + 1 + 4(c-1) - 4\left(\left\lfloor \frac{\sqrt{2}}{2}(c-1) \right\rfloor\right)$,

$S_1 + S_2 \geq (\pi(c-1)^2 - 2\sqrt{2}\pi(c-1) - 1 - 4(c-1) + 2\sqrt{2}(c-1))/8$.

Чётное число c можно разложить в сумму двух чисел $\frac{c}{2}$ способами, а все числа, не превосходящие c, – $\frac{c^2}{4}$ способами. Нечётное число c можно разложить в сумму двух чисел $\frac{c-1}{2}$ способами, а все числа, не превосходящие c, – $\frac{c^2-1}{4}$ способами.

То есть, $\frac{c^2-1}{4} \leq S_1 \leq \frac{c^2}{4}$.

Тогда $S_2 \geq (\pi(c-1)^2 - 2\sqrt{2}\pi(c-1) - 1 - 4(c-1) + 2\sqrt{2}(c-1))/8 - \frac{c^2}{4} =$
$\frac{\pi-2}{8}c^2 + \frac{2\pi-2\sqrt{2}\pi-4+2\sqrt{2}}{8}c + \frac{\pi+2\sqrt{2}\pi-2\sqrt{2}+3}{8}$,

$S_2 + S_3 = \frac{c(c+1)}{2} - S_1 \leq \frac{c^2+2c+1}{4}$.

Нас интересует, при каком значении c начнёт выполняться: $S_2 \geq \frac{S_2+S_3}{2}$.

$(\pi-3)c^2 - 2\left(3 + \left(\sqrt{2}-1\right)\pi - \sqrt{2}\right)c + \left(4 + \left(2\sqrt{2}+1\right)\pi - 2\sqrt{2}\right) \geq 0.$

Численно решить это уравнение нетрудно, но абсолютно не требуется. Здесь важен лишь коэффициент при главном члене. Раз он положителен, то ветви параболы направлены вверх, а это значит, что как только значение S_2 превысит половину суммы $S_2 + S_3$ (непосредственный подсчёт показывает, что это происходит при $c = 27$), так меньше половины уже не будет. Это как раз и означает, что пересечение единственно.

Ответ. При $n < 39$ остроугольных треугольников больше, чем тупоугольных. При $n \geq 39$ тупоугольных треугольников больше, чем остроугольных.