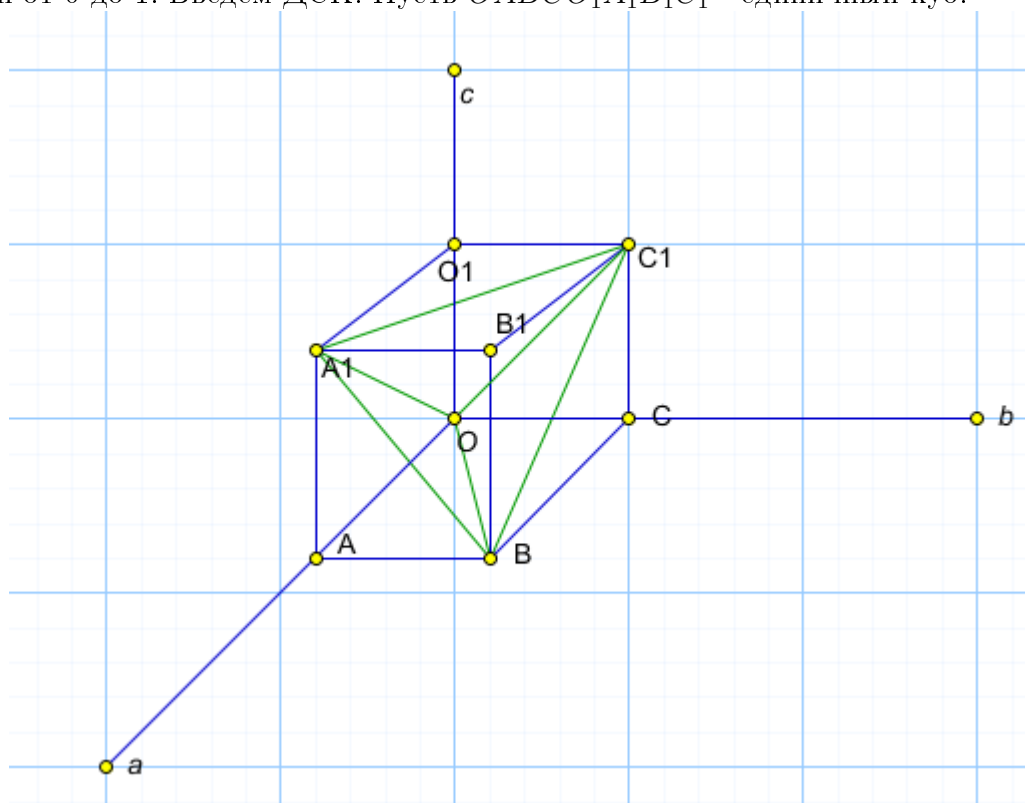


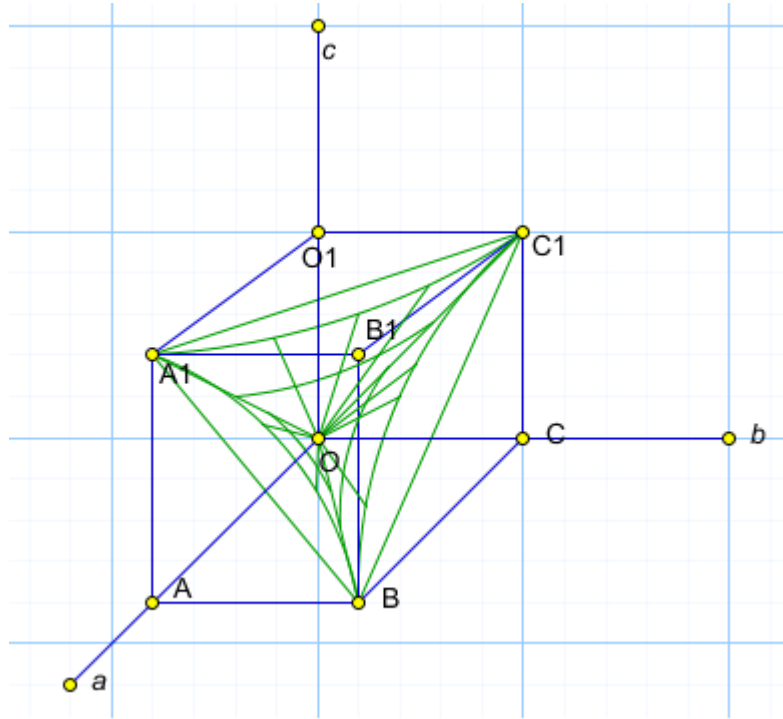
Сначала рассмотрим треугольники с вещественными сторонами длиной от 0 до 1. Введем ДСК. Пусть $OABCO_1A_1B_1C_1$ - единичный куб.



Если тройка чисел a, b, c удовлетворяет неравенствам треугольника $a > b + c$, $b > a + c$, $c > a + b$, ГМТ с координатами (a, b, c) являются внутренние точки многогранника $OBA_1B_1C_1$, вычисляем его объём:

$$V_{OBA_1B_1C_1} = 1 - 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Для тупоугольных треугольников должно выполняться одно из неравенств: $a^2 > b^2 + c^2$, $b^2 > a^2 + c^2$, $c^2 > a^2 + b^2$. ГМТ точек (a, b, c) - пересечение $V_{OBA_1B_1C_1}$ и внутренних точек конусов $a^2 = b^2 + c^2$, $b^2 = a^2 + c^2$, $c^2 = a^2 + b^2$.



Заметим, что конусы не имеют общих внутренних точек (т.к. не существует треугольников с двумя тупыми углами). С помощью формулы для объема конуса находим объем этого множества, который обозначим V_w :

$$V_w = 3 \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

Вернемся к исходной задаче. Пусть $a, b, c \in \mathbb{N}$, $a, b, c \leq n$. Если $k_1(n)$ - количество тупоугольных треугольников со сторонами a, b, c , а $k_2(n)$ - количество остроугольных треугольников со сторонами a, b, c , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_1(n)}{n^3} = V_w, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_2(n)}{n^3} = V_{OBA_1B_1C_1} - V_w.$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_1(n)}{k_2(n)} = \frac{V_w}{V_{OBA_1B_1C_1} - V_w} = \frac{\pi/4 - 1/2}{1 - \pi/4} \approx 1,32989618.$$

Т.о. при больших n тупоугольных треугольников будет больше, причем приблизительно в 1,32989618 раз. Осталось рассмотреть первые несколько n и понять, сколько их должно быть, чтобы уверенно утверждать, что при всех больших n тупоугольных треугольников больше.

Пусть объем V_w найден с точностью до δ . Оценим погрешность вычисления отношения: $V_w/(V_{OBA_1B_1C_1} - V_w)$:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{V_w + \delta}{V_{OBA_1B_1C_1} - (V_w + \delta)} - \frac{V_w}{V_{OBA_1B_1C_1} - V_w} \right| = \\ & = |\delta| \left| \frac{V_{OBA_1B_1C_1}}{(V_{OBA_1B_1C_1} - (V_w + \delta))(V_{OBA_1B_1C_1} - V_w)} \right| = \\ & = |\delta| \left| \frac{0,5}{(0,5 - \pi/4 + 0,5 + \delta)(0,5 - \pi/4 + 0,5)} \right| \leq \\ & \leq |\delta| \left| \frac{0,5}{(1 - \pi/4 - |\delta|)(1 - \pi/4)} \right|. \end{aligned}$$

Уже $|\delta| < 0.01$ получаем, что отклонение отношения будет не больше, чем 0,15. И этого уже достаточно, для того, чтобы при соответствующих такой погрешности n тупоугольных треугольников было больше. При $n = 500$ значение $|\delta|$ не превышает 0,001 и при больших n погрешность будет уменьшаться (хотя очевидно, что при больших n при такой замечательной поверхности погрешность с ростом n будет только уменьшаться и уж точно никогда уже не превысит 0.01, это, признаю, все же требует более строгого доказательства, чем соображения, что уменьшение кубиков ведет к увеличению точности расчета).

Случай $n < 500$ разберем простым перебором вариантов на компьютере. В итоге получаем: при $n \leq 15$ больше остроугольных треугольников. При $n > 15$ больше тупоугольных треугольников.