О. Б. Полубасов   07.10.2014 г.

===========MM195===============

MM195 (7 баллов)
Решения принимаются, по крайней мере, до 10.10.14

Доказать, что для любого натурального числа n, найдется натуральное m, такое что существует не менее n треугольников с целочисленными сторонами и медианой m.

==========================

Пусть стороны треугольника равны (a, b, c), $a \le b$, медиана m проведена к стороне c. Решая задачу MM189, мы выяснили некоторые свойства таких треугольников, в частности: $m \ge 3$, $c < m^2$, $2a^2 + 2b^2 - c^2 - 4m^2 = 0$, c чётно, a + b чётно.

Положим $c = a + b - 2$.
Подставим в формулу $2a^2 + 2b^2 - c^2 - 4m^2 = 0$ выражение для c и решим квадратное уравнение относительно b.

$b^2 - 2(a - 2)b + (a^2 + 4a - 4m^2 - 4) = 0$,
$D/4 = 4m^2 - 8a + 8$,
$b = a - 2 + 2\sqrt{(m^2 - 2a + 2)}$.

Получена рекуррентная формула для членов последовательности. Теперь нам требуется какое-нибудь начальное решение. Легко проверить, что тройка $a_0 = 1$, $b_0 = 2m - 1$, $c_0 = 2m - 2$ подходит. Этот треугольник вырожден и нужен только как стартовая точка. Итак:

$a_0 = 1$, $b_0 = 2m - 1$, $c_0 = 2m - 2$,
$a_{i+1} = b_i$, $b_{i+1} = b_i - 2 + 2\sqrt{(m^2 - 2b_i + 2)}$, $c_{i+1} = a_{i+1} + b_{i+1} - 2$.

Итерации продолжаются, пока $a \le b$, то есть ровно k раз, где $m = 2k + 1$, если m нечётно, и $m = 2k + 2$, если m чётно, $k \ge 1$. Рассмотрим оба случая по-отдельности.

i	a	b	c
0	1	37	36
1	37	69	104
2	69	97	164
3	97	121	216
4	121	141	260
5	141	157	296
6	157	169	324
7	169	177	344
8	177	181	356
9	181	181	360

Таблица 1. Пример последовательности. $k = 9$, $m = 2k + 1 = 19$.

Последний член последовательности равен $((m^2 + 1)/2, (m^2 + 1)/2, m^2 – 1)$. Он нам знаком ещё по задаче ММ189. Теперь, проследив последовательность от конца к началу, можно выразить значения её членов в замкнутом виде:

$a = (m^2 – 1)/2 + 1 – 2j(j + 1)$,
$b = (m^2 – 1)/2 + 1 – 2j(j – 1)$,
$c = m^2 – 1 – 4j^2$,
где $j = k – i$, $i = 1…k$.

Можно убедиться, что для этих выражений выполняется равенство $2a^2 +2b^2 – c^2 – 4m^2 = 0$ и все условия треугольника.

i	a	b	c
0	1	39	38
1	39	73	110
2	73	103	174
3	103	129	230
4	129	151	278
5	151	169	318
6	169	183	350
7	183	193	374
8	193	199	390
9	199	201	398

Таблица 2. Пример последовательности. $k = 9$, $m = 2k + 2 = 20$.

Последний член последовательности равен $(m^2/2 – 1, m^2/2 + 1, m^2 – 2)$. Он тоже нам знаком ещё по задаче ММ189. Проследив последовательность от конца к началу, можно выразить значения её членов в замкнутом виде:

$a = m^2/2 + 1 – 2(j + 1)^2$,
$b = m^2/2 + 1 – 2j^2$,
$c = m^2 – 1 – (2j + 1)^2$,
где $j = k – i$, $i = 1…k$.

Можно убедиться, что и для этих выражений выполняется равенство $2a^2 +2b^2 – c^2 – 4m^2 = 0$ и все условия треугольника.

Ответ. Для любого $m = 2k + 1$ существует не менее k искомых треугольников. Для любого $m = 2k + 2$ существует не менее k искомых треугольников.

Более глубокий анализ задачи.

Для произвольного m мы нашли формулы явного перечисления треугольников, для которых $c = a + b – 2$ (всех, хоть это и не доказано). Но существуют и треугольники других видов, поэтому для каких-то значений m количество целочисленных треугольников может быть больше.

Пусть c = a + b – d, где d чётно. Точно так же, как и для случая d = 2, можно выписать рекуррентную формулу:

$b^2 – 2(a – d)b + (a^2 + 2da – 4m^2 – d^2) = 0$,
$D/4 = 4m^2 – 4da + 2d^2$,
$b = a – d + \sqrt{(4m^2 – 4da + 2d^2)}$.

Рассмотрим случай d = 4, то есть c = a + b – 4

В случае d = 4 существуют две последовательности треугольников интересующего нас вида. Для одной из них стартовая точка: (1 – m, m + 1, -2).

При m ≥ 6 добавляется вторая последовательность со стартовой точкой: (2, 2m – 2, 2m – 4).

При нечётных m последовательности заканчиваются в точках

$((m^2 – 1)/4 – 4, (m^2 – 1)/4 + 2, (m^2 – 1)/2 – 6)$ и
$((m^2 – 1)/4, (m^2 – 1)/4 + 2, (m^2 – 1)/2 – 2)$.

При чётных m последовательности заканчиваются в точках

$((m^2 – 1)/4 – 2, (m^2 – 1)/4 + 2, (m^2 – 1)/2 – 4)$ и
$((m^2 – 1)/4 + 1, (m^2 – 1)/4 + 1, (m^2 – 1)/2 – 2)$.

Длины последовательностей составляют $\left\lfloor\frac{m}{4}\right\rfloor$ и $\left\lfloor\frac{m-2}{4}\right\rfloor$, а общее число треугольников – $\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor - 1$. Таким образом, целочисленных треугольников с d = 4 почти столько же (а для чётных m – столько же), что и треугольников с d = 2, поэтому ответ задачи можно существенно усилить, а заодно и упростить.

Усиленный ответ. Для любого m существует не менее m – 2 целочисленных треугольников с медианой m.

Количество целочисленных треугольников при d > 4

Число треугольников при d = 6 выражается формулой:

$\left\lfloor\frac{m-3}{6}\right\rfloor$, если m кратно 3,
$\left\lfloor\frac{m-3}{3}\right\rfloor$, если m не кратно 3.

Такая изломанность функции объясняется тем, что при d = 6 существуют две последовательности треугольников. Одна из них начинается в точке (3, 2m – 3, 2m – 6), а у второй стартовая точка перемещается при изменении m. Когда m кратно 3, обе последовательности совпадают, поэтому число членов в их объединении уменьшается.

Эмпирическим путём построена таблица зависимости количества целочисленных треугольников от m при различных d.

d	КОЛИЧЕСТВО ТРЕУГОЛЬНИКОВ
2	$\left\lfloor\frac{m-1}{2}\right\rfloor$
4	$\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor-1$
8	$\left\lfloor\frac{m-4}{4}\right\rfloor, m=0\ mod\ 2;\ \left\lfloor\frac{m-4}{2}\right\rfloor\ else$
16	$\left\lfloor\frac{m}{4}\right\rfloor-2$
32	$\left\lfloor\frac{m-16}{4}\right\rfloor, m=2\ mod\ 4;\ \left\lfloor\frac{m-16}{8}\right\rfloor\ else$
64	$\left\lfloor\frac{m-32}{8}\right\rfloor, m=0\ mod\ 2;\ \left\lfloor\frac{m-32}{16}\right\rfloor\ else$
2p	$\left\lfloor\frac{m-p}{2p}\right\rfloor, m=0\ mod\ p;\ \left\lfloor\frac{m-p}{p}\right\rfloor\ else$
4p	$\left\lfloor\frac{m-2p}{2p}\right\rfloor, m=0\ mod\ p;\ \left\lfloor\frac{m-2p}{p}\right\rfloor\ else$
$2p^2$	$\left\lfloor\frac{m-p^2}{2p}\right\rfloor, m=0\ mod\ p;\ \left\lfloor\frac{m-p^2}{p^2}\right\rfloor\ else$
$4p^2$	$\left\lfloor\frac{m-2p^2}{2p}\right\rfloor, m=0\ mod\ p;\ \left\lfloor\frac{m-2p^2}{p^2}\right\rfloor\ else$
$2p^3$	$\left\lfloor\frac{m-p^3}{2p^2}\right\rfloor, m=0\ mod\ p^2;\ \left\lfloor\frac{m-p^3}{p^2}\right\rfloor, m=0\ mod\ p;\ \left\lfloor\frac{m-p^3}{p^3}\right\rfloor\ else$
8p	$\left\lfloor\frac{m-4p}{4p}\right\rfloor, m=0\ mod\ 2p;\ \left\lfloor\frac{m-4p}{2p}\right\rfloor, m=0\ mod\ 2;$ $\left\lfloor\frac{m-4p}{2p}\right\rfloor, m=0\ mod\ p;\ \left\lfloor\frac{m-4p}{p}\right\rfloor\ else$
30 = 2*3*5	$\left\lfloor\frac{m-15}{30}\right\rfloor, m=0\ mod\ 15;\ \left\lfloor\frac{m-15}{15}\right\rfloor, m=0\ mod\ 3;$ $\left\lfloor\frac{m-15}{15}\right\rfloor, m=0\ mod\ 5;\ \left\lfloor\frac{2(m-15)}{15}\right\rfloor\ else$
42 = 2*3*7	$\left\lfloor\frac{m-21}{42}\right\rfloor, m=0\ mod\ 21;\ \left\lfloor\frac{m-21}{21}\right\rfloor, m=0\ mod\ 3;$ $\left\lfloor\frac{m-21}{21}\right\rfloor, m=0\ mod\ 7;\ \left\lfloor\frac{2(m-21)}{21}\right\rfloor+1, m=10\ mod\ 21;$ $\left\lfloor\frac{2(m-21)}{21}\right\rfloor-1, m=11\ mod\ 21;\ \left\lfloor\frac{2(m-21)}{21}\right\rfloor\ else$
48 = 16*3	$\left\lfloor\frac{m-24}{12}\right\rfloor, m=0\ mod\ 3;\ \left\lfloor\frac{m-24}{6}\right\rfloor\ else$
60 = 4*3*5	$\left\lfloor\frac{m-30}{30}\right\rfloor, m=0\ mod\ 15;\ \left\lfloor\frac{m-30}{15}\right\rfloor, m=0\ mod\ 3;$ $\left\lfloor\frac{m-30}{15}\right\rfloor, m=0\ mod\ 5;\ \left\lfloor\frac{2(m-30)}{15}\right\rfloor\ else$

Таблица 3. Зависимость количества целочисленных треугольников от m при различных d. p – нечётное простое число. Условия проверяются последовательно и применяется первое подходящее.

Никаких доказательств этих формул нет, чистая эмпирика. Верность формул проверена для m от 3 до 800 и для d от 2 до 1500. Для d, разложение которых содержит много сомножителей, построить общие формулы оказалось затруднительным – слишком уж различаются формулы для, вроде бы, похожих d (ср., например, d = 30 = 2*3*5 и d = 42 = 2*3*7), так что надежда выразить зависимость числа треугольников от m в замкнутом виде – слабая.

Зависимость числа треугольников от m для m = 1…100 выглядит так:

0, 0, 1, 2, 3, 4, 7, 8, 10, 12, 16, 16, 22, 21, 25, 30, 34, 30, 40, 39, 44, 47, 56, 49, 62, 61, 64, 69, 82, 65, 91, 86, 88, 93, 98, 94, 121, 113, 113, 113, 140, 113, 149, 137, 133, 153, 171, 141, 176, 160, 172, 176, 204, 169, 201, 194, 205, 214, 239, 187, 253, 235, 221, 244, 256, 229, 290, 264, 270, 251, 315, 259, 329, 303, 283, 311, 332, 294, 367, 316, 340, 356, 394, 307, 379, 381, 378, 376, 435, 335, 424, 413, 416, 438, 438, 393, 493, 440, 438, 435.

Этой последовательности в OEIS нет.