Об отношении суммы длин диагоналей выпуклого многоугольника к его периметру

Обозначим периметр выпуклого многоугольника буквой P, сумму длин его диагоналей – буквой S, а интересующее нас отношение $\frac{S}{P}$ – буквой q_n, где n – число сторон.

Начнем с самого простого многоугольника, имеющего диагонали - четырехугольника.

Как выяснится в дальнейшем, исследование уже этого частного случая приведет нас ко всем основным идеям, используемым для решения задачи в общем виде.

Рассмотрение простых частных случаев (квадрат, ромб с острым углом 60°, прямоугольник 3 на 4) показывает, что q_4 не является константой, но изменяется в относительно небольшом диапазоне в районе числа 0,7. Продолжая экспериментировать, легко обнаружить, что, если четырехугольник представляет собой вытянутый прямоугольник, искомое отношение становится близким к 1 (рис 1). А что будет, если вытягивать не прямоугольник, а ромб (рис. 2)? Очевидно, интересующее нас отношение будет наоборот уменьшаться и неограниченно приближаться к 0,5.

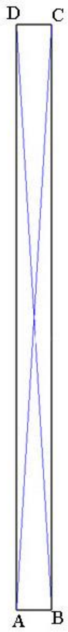

Рис. 1

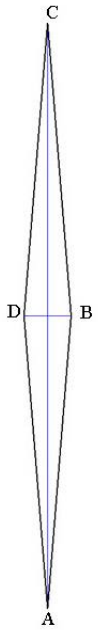

Рис. 2

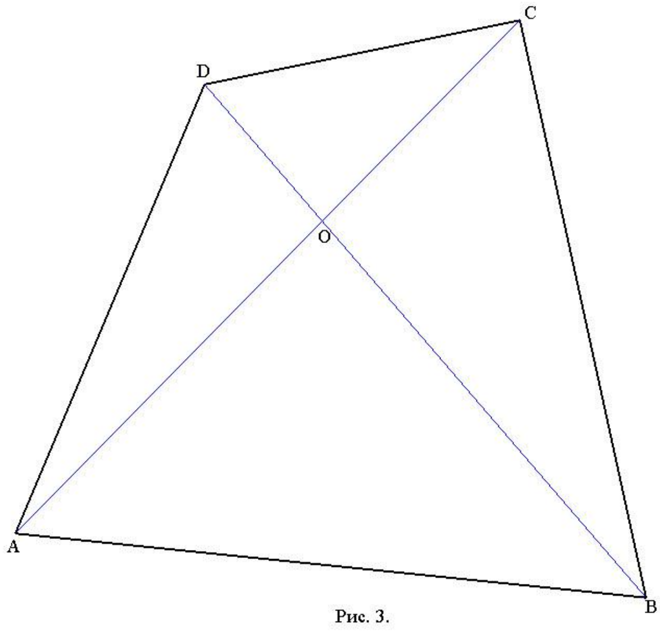

Рис. 3.

Поскольку вытянутый ромб можно непрерывной деформацией трансформировать в вытянутый прямоугольник и при этом q_4 тоже будет меняться непрерывно, очевидно, исследуемое отношение может принимать любые значения из промежутка (0,5; 1)[1].

Заметим, что для получения значений q_4, близких к единице и одной второй не обязательно рассматривать именно ромбы и прямоугольники. В первом случае сгодится любой четырехугольник, у которого две противоположных стороны очень малы и близки между собой, а две другие – наоборот велики и опять-таки приблизительно равны между собой. Для замены ромба тоже подойдет четырехугольник с парой длинных и парой коротких сторон. Только теперь короткие (а значит, и длинные) стороны должны быть не противоположны, а смежны.

Но вдруг наши эксперименты не затронули еще какие-то другие четырехугольники, для которых **Error! Objects cannot be created from editing field codes.** может оказаться больше 1 или наоборот меньше 0.5? Убедиться в том, что это не так, нам поможет неравенство

---

[1] Читателям, которым рассуждения «неограниченно приближаться» и «можно деформировать» показались недостаточно строгими, сообщу, что их можно сделать безупречными.

треугольника. Легко видеть (см. рис. 3), что: $AB+BC>AC;\ BC+CD>BD;\ CD+AD>AC;\ AD+AB>BD.$ Складывая эти неравенства получим $2P>2S$, т.е. $q_4<1$.

С другой стороны: $AO+BO>AB;\ BO+CO>BC;\ CO+DO>CD;\ D)+AO>AD.$ Откуда $2S>P$, т.е. $\frac{1}{2}<q_4$.

Итак, с четырехугольниками мы разобрались: отношение суммы длин диагоналей к периметру выпуклого четырехугольника может быть любым числом, большим одной второй, но меньшим единицы.

На первый взгляд, для пятиугольников наша задача будет гораздо сложнее, ведь у них больше степеней свободы. Но зато у нас теперь имеется метод: экспериментируя с частными случаями (по-видимому, для наших целей лучше всего подойдут «сплющенные» пятиугольники), постараться угадать искомый диапазон, а затем доказать, что любые числа из найденного диапазона достижимы, а все остальные нет.

Эксперимент показывает, что приблизиться к верхней границе диапазона для q_5 можно, рассматривая пятиугольники, аналогичные тому, что изображен на рисунке 4. Считая длинные стороны и длинные диагонали приблизительно равными, и пренебрегая короткими сторонами и короткой диагональю, получим значение q_5, примерно равное 2.

Подобраться к нижней границе диапазона можно, рассматривая пятиугольники, у которых четыре вершины расположены близко друг к другу, а пятая удалена (рис 5.). При допущениях, аналогичных предыдущим, получим значения q_5, близкие к 1.

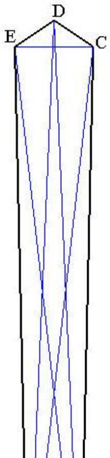

Рис. 4

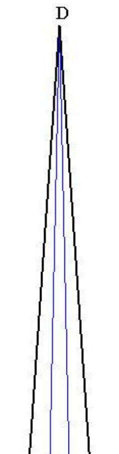

Рис. 5

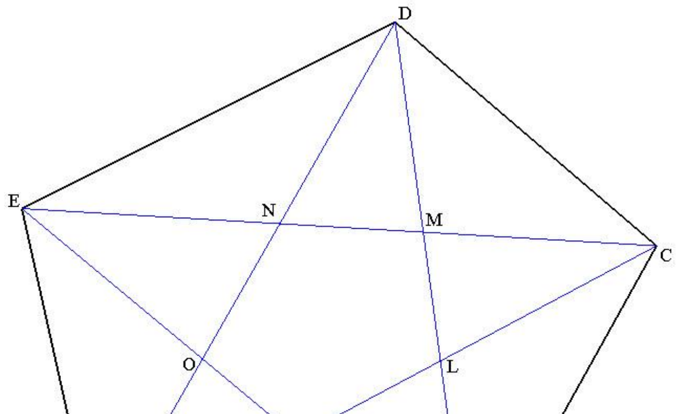

Рис. 6.

Может показаться, что реализация второй части плана уж точно будет на много сложнее, чем для четырехугольников. Достаточно посмотреть на рисунок 6 и убедиться, насколько больше на нем треугольников, чем на рисунке 3. Тем удивительнее, что требуемое доказательство проходит практически так же, как и в случае четырехугольников:

$AB+BC>AC;\ BC+CD>BD;\ CD+DE>CE;\ DE+AE>AD;\ AE+AB>BE.$

Просуммировав эти неравенства, получаем $2P>S$, т.е. $q_5<2$.

Далее: $AK + BK > AB;\ BL + CL > BC;\ CM + DM > CD;\ DN + EN > DE;\ E0 + AO > AE.$ Откуда, учитывая соотношение $AK + CL < AC$ и еще четыре подобных неравенства, мгновенно получаем $S > P$. Но это значит, $q_5 > 1$, что и требовалось.

Но позвольте! Что-то здесь не так! Парой абзацев выше мы убедились, что P и S могут быть сколь угодно близки, а теперь мы доказали, что S не просто больше P, сумма диагоналей больше периметра пятиугольника ABCDE более, чем на периметр пятиугольника KLMNO! Недоразумение проясняется, если посмотреть на аналог пятиугольника KLMNO на рисунке 5. При отдалении одной из вершин от остальных периметр внутреннего пятиугольника сам становится сколь угодно мал по сравнению с периметром ABCDE. Поэтому никакого противоречия не возникает.

Теперь мы готовы перейти к общему случаю. Причем на вооружении у нас не только изложенный выше план, но и гипотеза о том, как именно деформировать многоугольник, чтобы получать значения q_n как можно более близкие к границам диапазона его изменения.

Для того чтобы значение q_n получилось как можно меньше, будем удалять одну из вершин n-угольника от остальных. Стороны и диагонали, исходящие из этой вершины будем называть «длинными», а остальные стороны и диагонали - «короткими». Ясно, что q_n можно сделать сколь угодно близким отношению числа длинных диагоналей к числу длинных сторон или, что то же самое, половине числа длинных диагоналей. Поскольку из каждой вершины выпуклого n-угольника выходит ровно $n-3$ диагонали, в качестве гипотетической нижней границы q_n можно взять число $\frac{n-3}{2}$.

С верхней границей дело обстоит несколько сложнее. Рассмотрение случаев $n=4$ и $n=5$ наводит на мысль, что для увеличения q_n вершины многоугольника следует разделить на две по возможности равные группы и расположить вершины внутри групп близко друг к другу, а сами группы далеко друг от друга. Но это означает, что нам придется отдельно рассмотреть два случая, в зависимости от четности n.

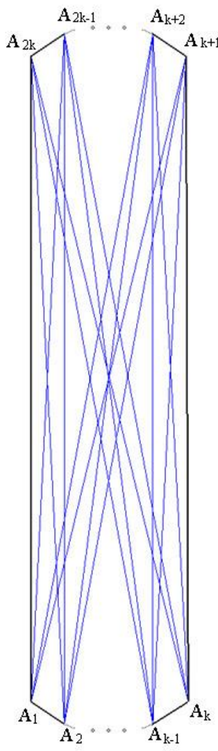

Рис. 7

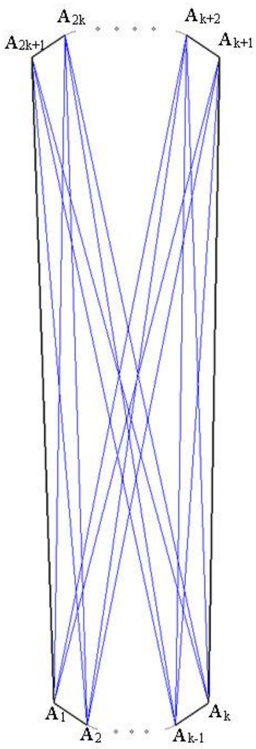

Рис. 8

Пусть сначала $n = 2k$ (рис.7). Посчитаем длинные диагонали. Ровно один из концов каждой длинной диагонали лежит в группе вершин $A_1, A_2, \dots, A_k$. Из вершин A_1 и A_k выходит по $k-1$ длинных диагоналей, а из остальных $k-2$ вершин – по k длинных диагоналей. Итого, имеем $2(k-1)+(k-2)k = k^2-2$ длинных диагоналей. Возвращаясь к n и деля на 2 (количество длинных сторон), получим, что отношение q_n можно сделать сколь угодно близким к числу $\frac{n^2-8}{8}$.

Теперь положим $n = 2k+1$ (рис. 8). В этом случае из вершин A_1 и A_k выходит по k длинных диагоналей, а из остальных $k-2$ вершин первой группы - по k+1 длинных диагоналей. Всего длинных диагоналей будет $2k+(k-2)(k+1) = k^2+k-2$. Подставляя $\frac{n-1}{2}$ вместо k, получим для q_n предельное значение $\frac{n^2-9}{2}$.

Итак, гипотетический интервал для отношения суммы длин диагоналей n-угольника к его периметру для четных n $-\ \left(\frac{n-3}{2};\frac{n^2-8}{2}\right)$. а для нечетных n $-\ \left(\frac{n-3}{2};\frac{n^2-9}{2}\right)$.

Прежде чем доказать справедливость наших гипотез, проверим их для частных случаев. Разумеется, такая проверка не может заменить доказательство: формула, справедливая для частного случая, не обязана быть верной для общего. Зато такая проверка может сэкономить массу времени. Если формула не верна уже в простейших частных случаях, следует оглянуться назад и подумать, что мы не учли при выводе, а не тратить время на напрасные поиски доказательства.

В нашем случае частные значения для q_n при $n=4$ и $n=5$ согласуются с полученными обобщениями. Дополнительным подтверждением правильности наших выводов может служить подстановка $n=3$. В этом случае оба граничных значения интервала для нечетных n обращаются в нуль, что вполне согласуется со здравым смыслом.

Для дальнейших выкладок нам будут полезны несколько новых обозначений. Будем называть i-диагональю диагональ, соединяющую вершины, между которыми расположено i промежуточных вершин (разумеется, из двух возможных альтернатив выбирается меньшее значение i). Через S_i обозначим сумму длин всех i-диагоналей.

Очевидно, что при $n=2k+1$ в многоугольнике имеется по n i-диагоналей для каждого i из множества $\{1,2,\ldots,k-1\}$. При $n=2k$ множество допустимых значений i останется прежним, но для $i=k-1$будет всего k диагоналей.

На рисунке 9 в качестве «типичного представителя» многоугольников с нечетным числом сторон изображен девятиугольник (автор полагает, что изображение с разрывами и многоточиями будет не слишком наглядным). Однако рассуждения мы будем вести для многоугольника с числом сторон равным $2k+1$.

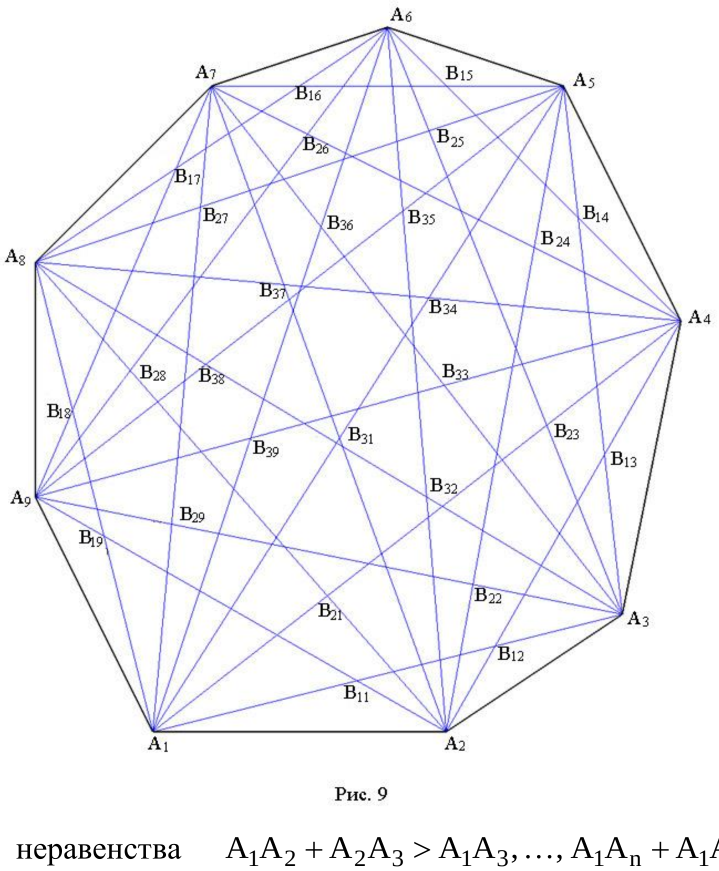

Рис. 9

Складывая неравенства $A_1A_2+A_2A_3>A_1A_3,\ldots,A_1A_n+A_1A_2>A_2A_n$, получим $2P>S_1$.

Далее, из неравенств $A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 > A_1A_4, \ldots, A_1A_n + A_1A_2 + A_2A_3 > A_3A_n$ следует соотношение $3P > S_2$.

. . . .

Из $A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{k-1}A_k > A_1A_k, \ldots, A_1A_n + A_1A_2 + \ldots + A_{k-2}A_{k-1} > A_{k-1}A_n$ следует, что $(k-1)P > S_{k-2}$.

Наконец, $A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_kA_{k+1} > A_1A_{k+1}, \ldots, A_1A_n + A_1A_2 + \ldots + A_{k-1}A_k > A_kA_n$ влечет соотношение $kP > S_{k-1}$.

Просуммировав неравенства для всех S_i, получим $(2+3+\ldots+k)P > S$. Осталось применить формулу суммы арифметической прогрессии $\frac{(k+2)(k-1)}{2}P = \frac{k^2+k-2}{2}P > S$.

Ну а то, что последнее соотношение равносильно неравенству $q_n < \frac{n^2-9}{2}$, мы уже знаем.

Для получения нижней границы q_n рассмотрим неравенства:

$A_1B_{11} + A_2B_{11} > A_1A_2,\ A_2B_{12} + A_3B_{12} > A_2A_3, \ldots, A_nB_{1n} + A_1B_{1n} > A_1A_n$;

$A_1B_{21} + A_2B_{21} > A_1A_2,\ A_2B_{22} + A_3B_{22} > A_2A_3, \ldots, A_nB_{2n} + A_1B_{2n} > A_1A_n$;

. . . .

$A_1B_{k-2,1} + A_2B_{k-2,1} > A_1A_2,\ A_2B_{k-2,2} + A_3B_{k-2,2} > A_2A_3, \ldots, A_nB_{k-2,n} + A_1B_{k-2,n} > A_1A_n$;

$A_1B_{k-1,1} + A_2B_{k-1,1} > A_1A_2,\ A_2B_{k-1,2} + A_3B_{k-1,2} > A_2A_3, \ldots, A_nB_{k-1,n} + A_1B_{k-1,n} > A_1A_n$.

Для каждой диагонали в данных неравенствах участвует по два отрезка, дающих в сумме лишь часть этой диагонали. Поэтому, просуммировав все неравенства, получим в левой части число заведомо меньшее S. Поскольку каждая сторона участвует $k-1$ неравенствах, в левой части после суммирования получим $(k-1)P$. Поделив на P, и выразив k через n, придем к требуемому соотношению $q_n > \frac{n-3}{2}$.

Пусть теперь $n = 2k$. Многоугольник, иллюстрирующий этот случай (при $n = 8$) изображен на рисунке 10.

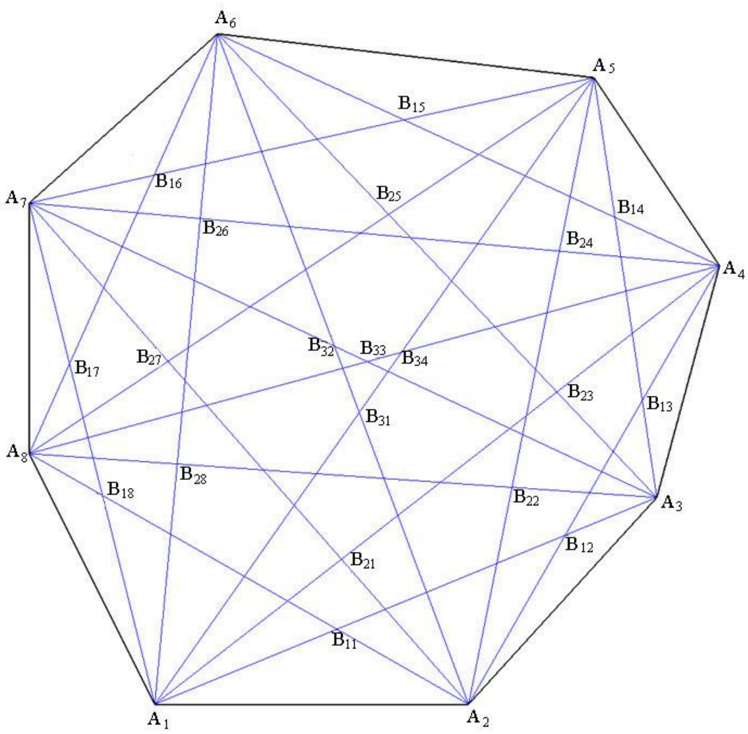

Рис. 10

Суммируя стороны по две, по три и т.д., и сравнивая с соответствующими диагоналями, получим оценки, аналогичные случаю нечетного n: $2P > S_1, 3P > S_2, \ldots, (k-1)P > S_{k-2}$. Однако для S_{k-1} ситуация будет несколько иная. Каждая k-1- диагональ, то есть диагональ, соединяющая противоположные вершины, будет участвовать сразу в двух неравенствах. Так, для диагонали A_1A_{k+1} это неравенства $A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_kA_{k+1} > A_1A_{k+1}$ и $A_{k+1}A_{k+2} + A_{k+2}A_{k+3} + \ldots + A_1A_{2k+1} > A_1A_{k+1}$

Сложив все такие неравенства, придем к соотношению $kP > 2S_{k-1}$ или $\frac{k}{2}P > S_{k-1}$.

Просуммировав по всем типам диагоналей получим

$\left(2+3+\ldots+(k-1)+\frac{k}{2}\right)P = \left(\frac{(k+1)(k-2)}{2}+\frac{k}{2}\right)P = \frac{k^2-2}{2}P > S$, что, как известно, равносильно $q_n < \frac{n^2-8}{8}$.

При обосновании нижней границы для q_n неравенства для участков i-диагоналей для всех i, меньших $k-1$, будут полностью идентичны тем, что рассмотрены для случая нечетного n. Складывая эти неравенства получим соотношение $S_1 + S_2 + \ldots + S_{k-2} > (k-2)P$.

Остается учесть неравенства, в которых участвуют отрезки k-1-диагоналей: $A_1B_{k-1,1} + A_2B_{k-1,1} > A_1A_2$, $A_2B_{k-1,2} + A_3B_{k-1,2} > A_2A_3, \ldots, A_kB_{k-1,k} + A_{k+1}B_{k-1,k} > A_kA_{k+1}$, $A_{k+1}B_{k-1,1} + A_{k+2}B_{k-1,1} > A_{k+1}A_{k+2}$, $\ldots$, $A_nB_{k-1,k} + A_1B_{k-1,k} > A_1A_n$.

И вновь существенное отличие этой ситуации от случая нечетного n заключается в том, что каждая k-1-диагональ участвует в неравенствах дважды[2]. Складывая эти неравенства получим оценку $2S_{k-1} > P$ или $S_{k-1} > \frac{P}{2}$. Складывая последнее неравенство с итоговым неравенством для остальных диагоналей, получим нужную оценку $S > \left(k-\frac{3}{2}\right)P = \frac{n-3}{2}P$.

Какие наблюдения и выводы можно сделать на основании полученных результатов? Видно, что границы для q_n растут с ростом n. Но это можно было предвидеть и без наших выкладок: ведь с ростом числа сторон число диагоналей растет опережающими темпами. Но теперь мы можем заметить, что верхняя граница, имеющая квадратичную зависимость от n, растет намного быстрее нижней, зависящей от n линейно. Поэтому не только граничные значения, по и длина допустимого интервала для q_n быстро растут с ростом n. Например, для одиннадцатиугольника длина интервала допустимых значений будет в 20 раз больше, чем для четырехугольника. А насколько равномерно распределены многоугольники по допустимому интервалу? Какой участок диапазона «населен наиболее густо»? Где сосредоточены «средние многоугольники»? Ответить на эти вопросы непросто. В первую очередь из-за того, что непросто разумно формализовать понятие «средний многоугольник». Зато мы можем найти значение q_n для правильных

[2] Другое, менее важное для нас отличие состоит в том, что участки k-1-диагоналей складываются в целые диагонали.

многоугольников. Для квадрата исследуемое отношение равно $\frac{\sqrt{2}}{2}$, т.е. среднему геометрическому между границами диапазона. Оказывается, это единственный случай, q_n для правильных многоугольников расположено ближе к нижней границы допустимого интервала. Уже для правильного пятиугольника наше отношение будет ближе к двойке, чем к единице, а именно $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.Те, кому это число показалось знакомым, не ошиблись. Это знаменитое «золотое сечение».

Не очень сложно вывести и общую формулу, выражающую отношение суммы длин диагоналей правильного n-угольника к его периметру (обозначим его через Q_n). Читатели могут проделать этот вывод самостоятельно. Для этого понадобится совсем немного знаний из тригонометрии. При этом, как обычно, случаи четного и нечетного n опять будут немного отличаться. Если объединить их в одной формуле, то ответ будет таким ($\lfloor n/2 \rfloor$ означает наибольшее целое число, не превосходящее $n/2$):

$$Q_n = \frac{-\frac{1+(-1)^n}{4} + \sum_{k=2}^{\lfloor n/2 \rfloor} \sin\frac{\pi k}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}$$

С ростом n отношение Q_n к верхней границе диапазона для q_n будет расти. Но это не значит, Q_n будет «прижиматься» к этой границе. Можно показать, что при устремлении n к бесконечности это отношение будет стремиться к числу $\frac{8}{\pi^2}$.

Вопросы для самостоятельного исследования

- Сколько сторон может иметь выпуклый многоугольник, для которого $q_n = 7$?
- Существуют ли другие (отличные от рассмотренных) многоугольники, для которых q_n можно сделать сколь угодно близким к границам интервала допустимых значений?
- Как изменится диапазон допустимых значений q_n, если снять ограничение выпуклости многоугольника?