О. Б. Полубасов   23.07.2015 г.

===========MM203===============

MM203 (5 баллов)

Решения принимаются до 25.09.2015

Единичный квадрат разрезали на 5 равновеликих фигур отрезками, параллельными диагоналям. Найти наименьшую возможную суммарную длину этих отрезков.

Задача понравилась. Сначала кажется, что потребуется рассмотрение огромного количества возможных разрезов, вычисление координат точек и утомительные арифметические манипуляции с радикалами. Но всё упрощается, когда заметишь простую закономерность. Рассмотрим какой-нибудь разрез, соединяющий противоположные стороны квадрата (рис. 1 а, б). Если придерживаться пары выбранных направлений (например, слева направо и сверху вниз), то все такие разрезы имеют одинаковую длину, а именно, $\sqrt{2}$.

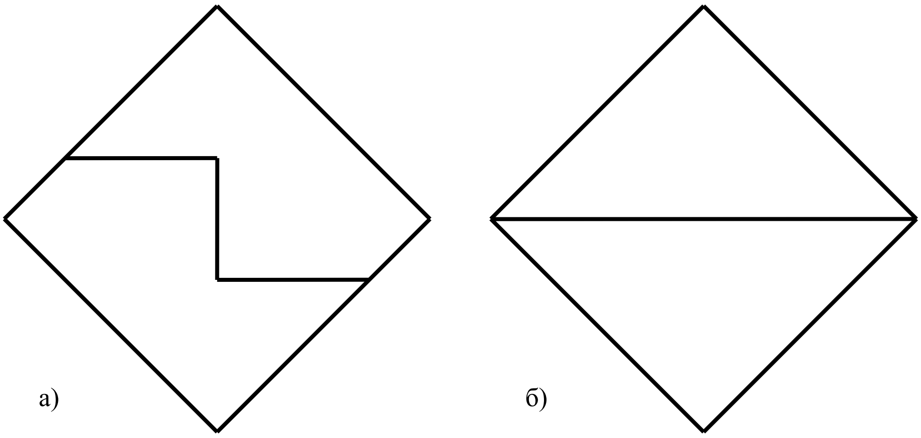


Рис. 1. Разрезание квадрата на две равновеликие части. Разрез соединяет противоположные стороны квадрата. Суммарная длина отрезков $L = \sqrt{2}$.

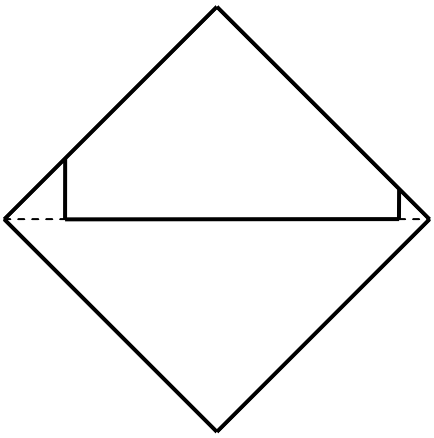


Рис. 2. Разрез соединяет смежные стороны квадрата. Части не равновеликие.

А вот разрез на рис. 2 соединяет смежные стороны квадрата. Он имеет ту же длину, что и разрезы на рис. 1, но отсекает меньшую площадь, а для увеличения отсекаемой площади потребуется увеличить длину разреза.

Поэтому при разрезании квадрата на две равновеликие части отрезками, параллельными диагоналям, наименьшая возможная длина линии равна $\sqrt{2}$.

Рассмотрим разрезание квадрата на три равновеликие части (рис. 3). Чёрная линия соединяет противоположные стороны квадрата, так что её длина равна $\sqrt{2}$. Красная линия – это половина гипотенузы равнобедренного треугольника площадью $\frac{1}{3}$, поэтому её длина равна $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

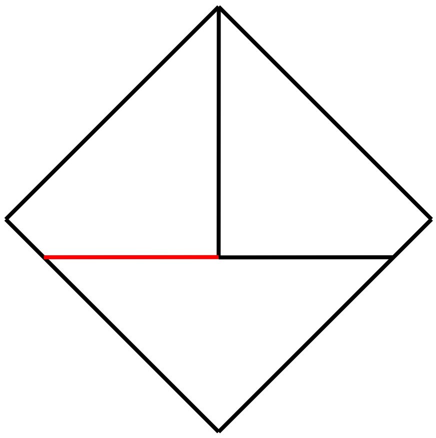


Рис. 3. Разрезание квадрата на три равновеликие части. Суммарная длина отрезков L = $\sqrt{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}$.

На рис. 4 приведено разрезание квадрата на четыре равновеликие части. Чёрная линия соединяет противоположные стороны квадрата, придерживаясь пары направлений, так что её длина равна $\sqrt{2}$. Красные отрезки – это половины гипотенуз равнобедренных треугольников площадью $\frac{1}{4}$, поэтому длина каждого из двух красных отрезков равна $\frac{1}{2}$.

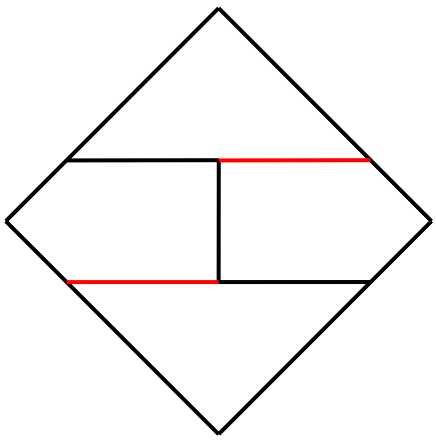


Рис. 4. Разрезание квадрата на четыре равновеликие части. Суммарная длина отрезков L = $\sqrt{2}+1$.

На рис. 5 приведено разрезание квадрата на пять равновеликих частей. На рис. 5а,б центральная фигура является прямоугольником, а на рис. 5в,г – квадратом. Заметим, что для подсчёта суммарной длины отрезков не требуется вычислять длины сторон центрального прямоугольника и координаты его углов. Не важна и точная форма разрезов. Чёрная линия соединяет противоположные стороны квадрата, придерживаясь пары направлений, так что её длина равна $\sqrt{2}$. Длина красной линии совпадает с длиной чёрной (между красными и чёрными отрезками можно построить одно-однозначное соответствие).

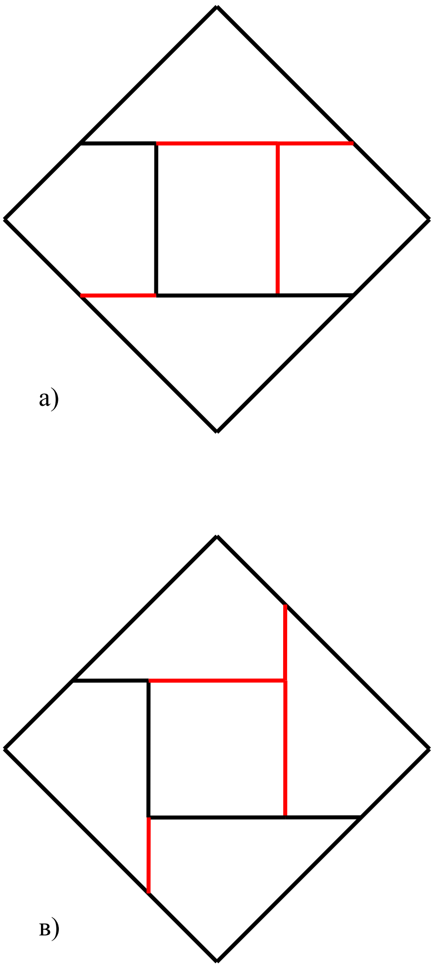


Рис. 5. Разрезание квадрата на пять равновеликих частей. Суммарная длина отрезков $L = 2\sqrt{2}$.

При разрезании квадрата на большее число n равновеликих частей используется тот же принцип (рис. 6-10).

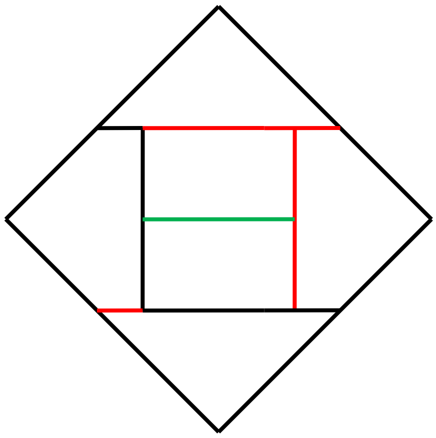


Рис. 6. n = 6, $L = 2\sqrt{2} + (\sqrt{2} + \sqrt{(2/3)})/4$.

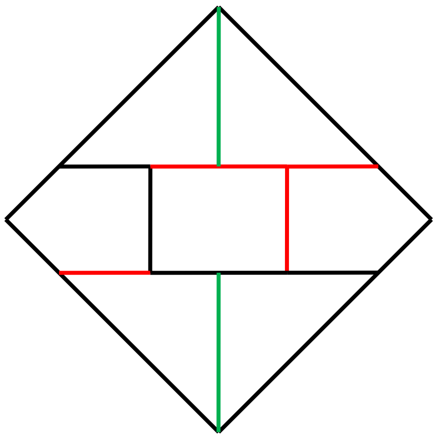
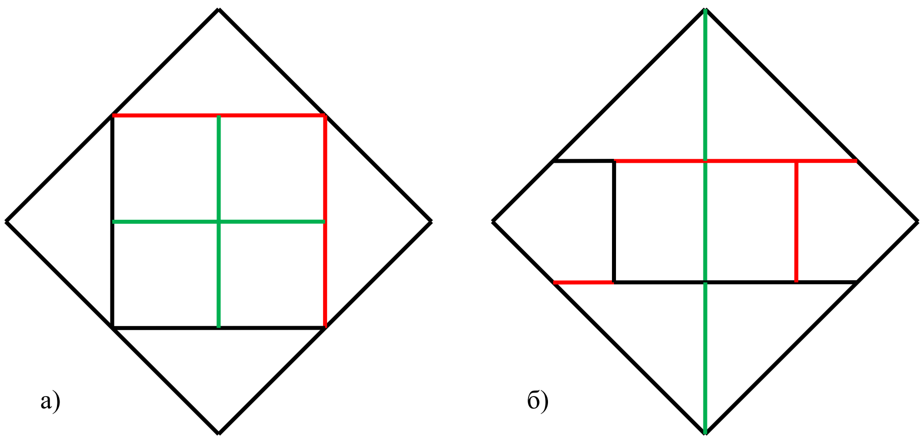


Рис. 7. n = 7, $L = 2\sqrt{2} + \sqrt{(8/7)}$.



а) б)

Рис. 8. n = 8, $L = 3\sqrt{2}$.

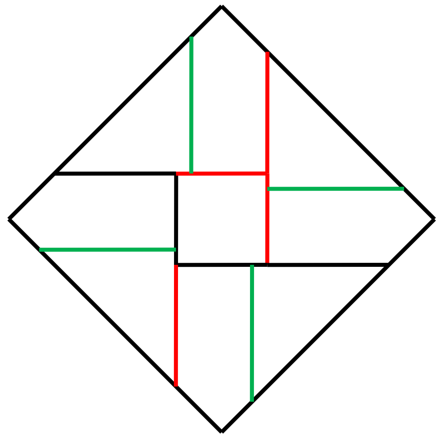


Рис. 9. n = 9, L = 3√2 + (1/3)√2.

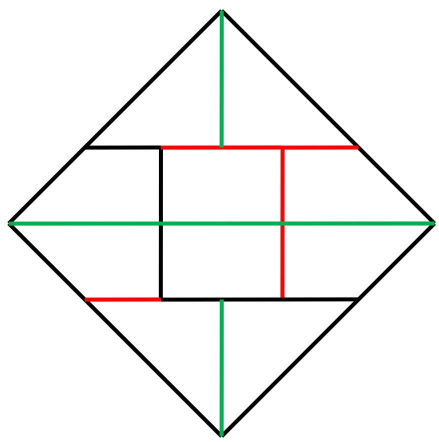


Рис. 10. n = 10, L = 3√2 + √ (4/5).

Полученные результаты сведены в таблицу 1.

n	L	примерно	разность
1	0	0	
2	√2	1.414	
3	√2 + √3/3	1.992	0.577
4	√2 + 1	2.414	0.423
5	2√2	2.828	0.414
6	2√2 + (√2 + √(2/3))/4	3.386	0.558
7	2√2 + √(8/7)	3.897	0.511
8	3√2	4.243	0.345
9	3√2 + (1/3)√2	4.714	0.471
10	3√2 + √(4/5)	5.137	0.423

Таб. 1. Зависимость суммарной длины L от числа фигур n.

Ответ. Для пяти фигур суммарная длина разрезающих отрезков равна 2√2.