ММ203.

Единичный квадрат разрезали на 5 равновеликих фигур отрезками, параллельными диагоналям. Найти наименьшую возможную суммарную длину этих отрезков.

Решение.

Квадрат разбивается на 5 многоугольников, площадь каждого $\frac{1}{5}$. *В многоугольниках возможны углы только в* $45°$, $90°$, $135°$, *а также угол в* $270°$, *но многоугольник с таким углом плохо подходит к выполнению условий задачи.*

Задача о минимизации суммарной длины отрезков равносильна задаче о минимизации суммы периметров 5 многоугнольников разбиения - если обозначить сумму искомых отрезков за L, *то сумма периметров будет равна* $SP = 2L + 4$.

Рассмотрим разные схемы разрезаний. Сначала разрежем квадрат четырьмя отрезками, параллельными одной диагонали (рис. 1).

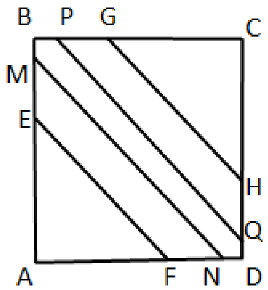

Рис. 1

$\triangle AEF$ *и* $\triangle CGH$ *прямоугольные, равнобедренные, равные. Катеты в них* $|AE| = |AF| = |CH| = |CG| = \sqrt{\frac{2}{5}}$, *гипотенузы* $|EF| = |GH| = \frac{2}{\sqrt{5}}$. *Далее, две равнобедренные трапеции* $MNFE$ *и* $PQHG$, *основания у них* $\frac{2}{\sqrt{5}}$ *и* $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$, *высота* $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{5}}$, *боковые стороны* $|ME| = |FN| = |HQ| = |PG| = \sqrt{\frac{6-4\sqrt{2}}{5}} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$. *Последний многоугольник в разбиении - шестиугольник* $MNDQPB$, *диагональю* BD *он разрезается на две равные, равнобедренные трапеции с основаниями* $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ *и* $\sqrt{2}$, *высотой* $\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{10}}$, *и* $|MB| = |BP| = |ND| = |DQ| = \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}}$.

Находим периметры многоугольников.
Треугольники AFE и CHG: $P_3 = \frac{2\left(\sqrt{2}+1\right)}{\sqrt{5}}$
Трапеции FEMN и HGPQ: $P_4 = \frac{6}{\sqrt{5}}$
Шестиугольник MNDQPB: $P_6 = \frac{4\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}-2\right)}{\sqrt{5}}$.
Сумма периметров равна $SP = \frac{4\left(2\sqrt{2}+\sqrt{5}+2\right)}{\sqrt{5}} \approx 12,637$.
Суммарная длина отрезков разбиения $L = \frac{4\left(\sqrt{2}+1\right)}{\sqrt{5}} \approx 4,319$.

Данную схему разрезания можно считать базовой, далее посмотрим другие схемы, например, объеденим два соседних многоугольника и резрежем на 2 части отрезком, параллельным другой диагонали. А затем можно объединять с дальнейшим перпендикулярным разрезанием и по 3 части.

Попробуем определить некоторые критерии поиска оптимального решения. Назовём круговой оболочкой многоугольника такой круг, в котором целиком находится данный многоугольник. Для заданного многоугольника найдём круг наименьшего радиуса. Гипотеза - среди 2-х равновеликих многоугольников (по условиям задачи - с углами в $45°$, $90°$, $135°$*) периметр меньше у того, у которого меньше радиус наименьшей круговой оболочки. Таким образом, нужно найти такое разбиение, в котором сумма радиусов наименьших круговых оболочек многоугольников была наименьшей.*

Рассмотрим $\triangle AMN$*, его площадь в 2 раза больше площади требуемой в условии фигуры, его можно разбить на 2 равные части не отрезком* EF*, а, например, медианой, проведённой из вершины* A *как на рис. 2.*

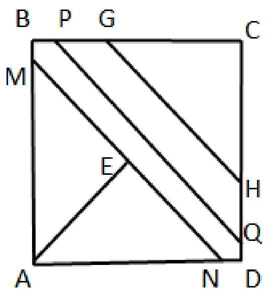

Рис. 2

Отрезок $|AE| = \sqrt{\frac{2}{5}}$ *и тогда сумма периметров равна* $SP = \frac{2\left(5\sqrt{2}+2\sqrt{5}+2\right)}{\sqrt{5}} \approx 12,113$, *а сумма длин отрезков разбиения* $L = \frac{5\sqrt{2}+2}{\sqrt{5}} \approx 4,057$.

Но ещё лучше разрезать таким же образом $\triangle CPQ$, *рис. 3*

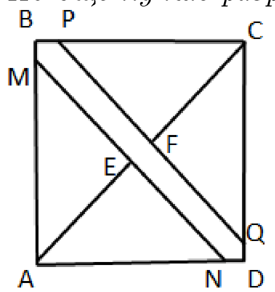

Рис. 3

В этом разбиении сумма периметров равна $SP = 4\cdot\left(3\sqrt{\frac{2}{5}}+1\right) \approx 11,589$, *а сумма длин отрезков разбиения* $L = 6\sqrt{\frac{2}{5}} \approx 3,795$.

Рассмотрим следующую схему разрезов (рис.4)

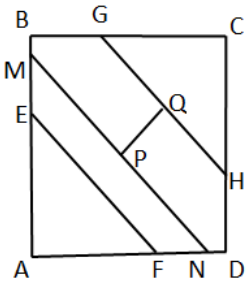

Рис. 4

В ней $|PQ| = \frac{2\sqrt{5}-2-\sqrt{2}}{\sqrt{10}}$, *сумма периметров равна* $SP = \frac{5\sqrt{2}+4\sqrt{5}+7+\sqrt{10}}{\sqrt{5}} \approx 11,707$, *а сумма длин отрезков разбиения* $L = \frac{5\sqrt{2}+7+\sqrt{10}}{2\sqrt{5}} \approx 3,853$.

Улучшить эту схему можно так (рис.5)

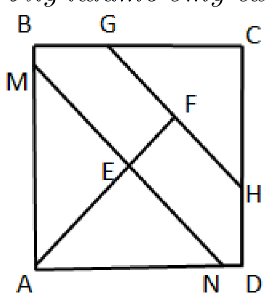

Рис. 5

В этом случае $L = \frac{2\sqrt{2}+1+\sqrt{10}}{\sqrt{5}} \approx 3,126.$

Теперь следующая схема

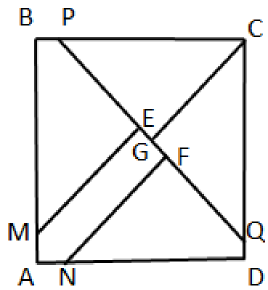

Рис. 6

В ней $|ME| = |NF| = \frac{\sqrt{11-4\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}$, *сумма длин отрезков разбиения* $L \approx 3,180.$

Ещё одна схема

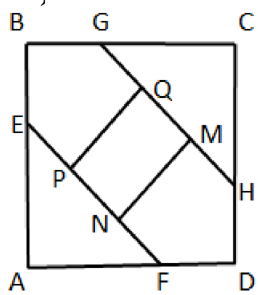

Рис. 7

В ней $|MN| = |PQ| = \sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{2}-2\sqrt{5}}{5}$, *а* $|MN| = |PQ| = \frac{5\sqrt{2}+2\sqrt{5}}{30}$, *сумма длин отрезков разбиения*

$L = 2\sqrt{2} \approx 2,828.$ *Это и есть оптимальное решение - сумма отрезков равна 2-м диагоналям. Меньше она быть не может, тогда обязательно площадь хотя бы одного из многоугольников будет больше* $\frac{1}{5}$. *Но эта схема не единственная, можно подобрать сколько угодно разбиений такой длины. Например, вот очень красивая, симметричная схема разрезания*

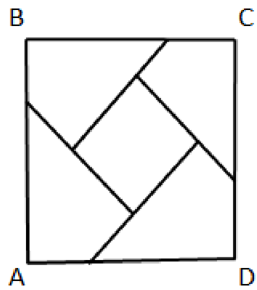

Рис. 8

В центре расположен квадрат со стороной $\frac{1}{\sqrt{5}}$, *к каждой стороне этого квадрата примыкают одинаковые четырёхугольники.*