О. Б. Полубасов 18.08.2016 г.

===========MM212===============

MM212 (4 балла)
Решения принимаются до <u>17.09.2016</u>

Доказать, что любой многогранник, имеющий 2016 вершин, может быть разрезан на 4030 тетраэдров.

===========================

1. Пусть V – число вершин многогранника, G – число граней, E – число рёбер. По теореме Эйлера, V + G = E + 2.

Пусть g_i – число сторон i-й грани. Произвольным образом триангулируем каждую грань (рис. 1. б). Число получившихся треугольников равно

$$T = \sum_{i=1}^{G}(g_i - 2) = \sum_{i=1}^{G} g_i - 2G = 2E - 2G = 2V - 4. \qquad (1)$$

Выберем произвольную точку О, лежащую строго внутри многогранника. Соединив точку О с вершинами триангуляции, получим разбиение многогранника на $T = 2V - 4$ тетраэдра (рис. 1. в).

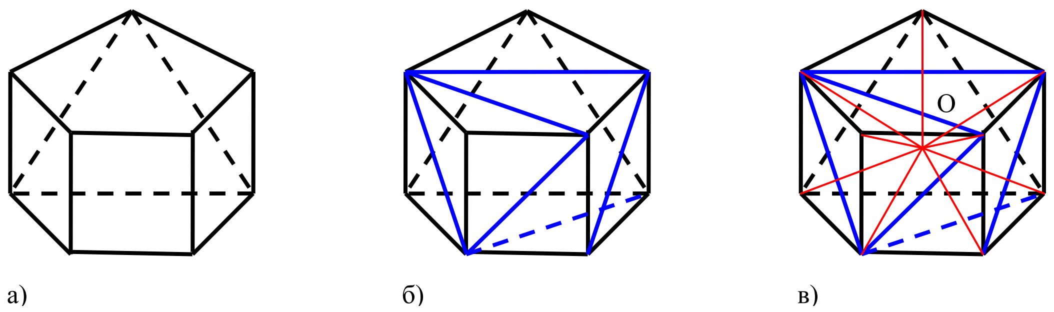

Рис. 1. Разбиение многогранника на 2V – 4 тетраэдра.

2. Выберем теперь точку О не внутри, а на границе многогранника.

Если точка О лежит в грани многогранника, то $g_i - 2$ тетраэдров разбиения получатся вырожденными, где g_i – число сторон грани, поэтому многогранник разбивается на $T_g = 2V - 2 - g_i$ тетраэдров.

Если точка О лежит на ребре многогранника, то $g_i + g_j - 4$ тетраэдров разбиения получатся вырожденными, где g_i и g_j – число сторон двух граней, инцидентных ребру, поэтому многогранник разбивается на $T_e = 2V - g_i - g_j$ тетраэдров.

Если точка О лежит в вершине многогранника, то $\sum_i (g_i - 2)$ тетраэдров разбиения получатся вырожденными, где g_i – число сторон у граней, инцидентных вершине, поэтому многогранник разбивается на $T_v = 2V - 4 - \sum_i (g_i - 2)$ тетраэдров.

Чему равно минимаксное значение $\sum_i (g_i - 2)$ для многогранника, имеющего V вершин, то есть, минимум максимальных значений по всем V-вершинным многогранникам?

Сумма значений $\sum_i (g_i - 2)$ по всем вершинам равна $\sum_{j=1}^{V} \sum_i (g_i - 2) = \sum_{i=1}^{G} g_i^2 - 4E$, поэтому $max \sum_i (g_i - 2) \geq \frac{\sum_{i=1}^{G} g_i^2 - 4E}{V}$.

Так как $\sum_{i=1}^{G} g_i = 2E$, а минимум суммы квадратов достигается, когда все g_i равны, то $g_i \cong \frac{2E}{G}$.

Следовательно,

$$minmax \geq \frac{G\left(\frac{2E}{G}\right)^2 - 4E}{V} = \frac{4E(E-G)}{VG} = \frac{4E(V-2)}{VG} = \left(\frac{4V-8}{G} + 4\right)\frac{V-2}{V}. \qquad (2)$$

Если V задано, то выражение (2) минимально, когда G максимально, то есть, когда все грани – треугольные, $G \leq 2V - 4$.

$$minmax \geq \left(\frac{4V-8}{2V-4} + 4\right)\frac{V-2}{V} = 6 - \frac{12}{V}.$$

$$T_v = 2V - 4 - minmax \leq 2V - 10 + \frac{12}{V}. \qquad (3)$$

Таким образом, доказано **утверждение 1.**

Для любого многогранника, имеющего V вершин, существует разрезание на $2V - 10 + \frac{12}{V}$ тетраэдров или меньше.

Утверждение 2.

Если многогранник может быть разрезан на n тетраэдров, то он может быть разрезан и на любое большее число тетраэдров.

Доказательство.

Действительно, любой из тетраэдров, получившихся в результате разрезания, можно разрезать на два тетраэдра, и т.д.

Следствие.

Любой многогранник, имеющий V вершин, можно разрезать на любое число тетраэдров, большее чем $2V - 11 + \frac{12}{V}$.

Ответ. Любой многогранник, имеющий 2016 вершин, можно разрезать на любое число тетраэдров, большее чем 2*2016–11 = 4021, а значит, и на 4030.

Примечание. Никто не утверждает, что на меньшее число тетраэдров – нельзя.