О. Б. Полубасов   29.10.2016 г.

===========MM216===============

MM216 (10 баллов)

Решения принимаются до 29.10.2016

Назовем натуральное число *n* красивым, если наименьшее натуральное число, имеющее ровно *n* натуральных делителей, кратно *n*.

1. Доказать, что все праймориалы красивы.
2. Верно ли, что все факториалы красивы?
3. Сколько существует красивых чисел вида k^7, где *k* - некоторое натуральное число?
4. Сколько существует красивых чисел вида 7^k, где *k* - некоторое натуральное число?

===========================

1. Задача 1. Доказать, что все праймориалы красивы

Сначала докажем полезное утверждение.

Утверждение 1.

$$p_i^{p_j} > p_{i+j-1}, \text{ где } p_i - \text{i-е простое число.} \tag{1}$$

Доказательство.

Согласно постулату Бертрана: $p_{i+1} < 2p_i$.

Следовательно, $p_{i+j-1} \le 2^{j-1}p_i \le p_i^{j-1}p_i = p_i^j < p_i^{p_j}$.

Пусть $n = \prod_{i=1}^m p_i$, где p_i – i-е простое число. Тогда одно из чисел, имеющих ровно *n* натуральных делителей, равно

$$A_m = \prod_{i=1}^{m} p_i^{p_{m+1-i}-1} = 2^{p_m-1}3^{p_{m-1}-1} \dots p_{m-1}^2 p_m.$$

Меньшее натуральное число с тем же количеством натуральных делителей можно было бы построить, избавившись от последнего сомножителя за счёт увеличения степени одного из меньших сомножителей. Для этого хоть для какого-нибудь i должно выполняться: $p_m > p_i^{p_{m+1-i}}, i = 1 \dots m-1$.

Но, по утверждению 1, $p_i^{p_{m+1-i}} > p_m$. Поэтому A_m – наименьшее натуральное число, имеющее ровно *n* натуральных делителей.

Легко видеть, что A_m кратно *n*. Более того, A_m кратно произведению всех праймориалов от 2 до *n* включительно.

2. Задача 4. Сколько существует красивых чисел вида 7^k, где k – некоторое натуральное число?

Рассмотрим число $n = p_m^k$, где p_m – m-е простое число, $p_m \geq 3$, k – натуральное. Одно из чисел, имеющих ровно n натуральных делителей, равно

$$A_{m,k} = \prod_{i=1}^{k} p_i^{p_m-1} = 2^{p_m-1}3^{p_m-1}\dots p_k^{p_m-1}.$$

Меньшее натуральное число с тем же количеством натуральных делителей можно построить, избавившись от последнего сомножителя за счёт увеличения степени первого сомножителя. Для этого должно выполняться: $p_k^{p_m-1} > 2^{p_m(p_m-1)}$, то есть, $p_k > 2^{p_m}$.

Пусть $p_k < 2^{p_m}$, тогда $A_{m,k}$ – наименьшее натуральное число, имеющее ровно n натуральных делителей. $A_{m,k}$ будет делиться на p_m^k, если и только если $m \leq k < p_m$.

Предположим, что существует красивое p_m^k, при $p_m \geq 3$, $p_k > 2^{p_m}$.

Любое число, имеющее ровно $n = p_m^k$ натуральных делителей, имеет вид

$$B_{m,k} = \prod_{i=1}^{x} p_i^{p_m^{s_i}-1}, \qquad \text{причём} \sum_{i=1}^{x} s_i = k.$$

Чтобы $B_{m,k}$ было кратно p_m^k, необходимо $p_m^{p_m^{s_m}-1} \geq p_m^k$, то есть, $p_m^{s_m} - 1 \geq k$.

Так как $p_k > 2^{p_m}$, то $k > p_m$. Следовательно, $s_m \geq 2$.

Если $B_{m,k}$ минимально, то $\forall i < m$: $s_i \geq s_m$, поэтому $x \leq k - m$.

Чтобы $B_{m,k}$ было минимальным, необходимо $p_m^{p_m^{s_m-1}} < p_{x+1}$, иначе можно было бы уменьшить $B_{m,k}$, заменив сомножитель $p_m^{p_m^{s_m}-1}$ на $p_m^{p_m^{s_m-1}-1}p_{x+1}^{p_m-1}$ (так как $p_m^{s_m-1}p_m = p_m^{s_m}$).

Поскольку $s_m \geq 2$, то $3^{s_m-1} \geq 1.5s_m$.

$p_m^{s_m} \geq k+1$,

$p_m^{3^{s_m-1}} \leq p_m^{p_m^{s_m-1}} < p_{x+1} \leq p_{k-m+1} \leq p_{k-1}$,

Следовательно, $p_{k-1} > p_m^{3^{s_m-1}} \geq (k+1)^{\frac{3^{s_m-1}}{s_m}} \geq (k+1)^{1.5}$. Решений нет.

Таким образом, p_m^k, где p_m – m-е простое число, $p_m \geq 3$, k – натуральное, является красивым, если и только если $m \leq k < p_m$.

Для $n = 7^k = p_4^k$: $A_{4,k}$ кратно n при $4 \leq k \leq 6$. Следовательно, красивых чисел вида 7^k имеется ровно три: 7^4, 7^5 и 7^6.

Примечание. При $p_m = 2$ предыдущие неравенства не верны. Существуют два красивых числа вида 2^k: 2^1 ($A_{1,1} = 2$) и 2^3 ($B_{1,3} = 24$).

3. Задача 3. Сколько существует красивых чисел вида k^7, где k – некоторое натуральное число?

Число 1 красиво в любой степени.

Число 2 красиво только в степенях 1 и 3.

Пусть $k = p_m^s$, где p_m – m-е простое число, $m \geq 2$, s – натуральное, тогда $k^7 = p_m^{7s}$. Как доказано в разделе 2, p_m^{7s} красиво только при $m \leq 7s < p_m$.

$s = 1, m \in \{5, 6, 7\}$.
$s = 2, m \in \{7, \dots, 14\}$.
$s = 3, m \in \{9, \dots, 21\}$.
$s = 4, m \in \{10, \dots, 28\}$.
$s = 5, m \in \{12, \dots, 35\}$.

Так как p_m растёт быстрее, чем m, то с ростом s интервал допустимых значений m увеличивается, а значит, количество красивых чисел вида $(p^s)^7$ бесконечно. Впрочем, не красивых – тоже.

Аналогично доказывается, что количество красивых чисел вида $(p^s)^t$, где p – простое, s – натуральное, бесконечно для любого наперёд заданного натурального t.

4. Задача 2. Верно ли, что все факториалы красивы?

Очевидно, что каноническое разложение n! в произведение степеней простых чисел содержит все простые числа, не превышающие n, и только их.

Пусть $n! = \prod_{i=1}^{m} p_i^{s_i}$, где p_i – i-е простое число, $s_i > 0$, n > 1. Одно из чисел, имеющих ровно $n!$ натуральных делителей, равно

$$A_n = \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=(\sum_{k=1}^{i-1} s_k)+1}^{\sum_{k=1}^{i} s_k} p_j^{p_{m+1-i}-1} \qquad (2).$$

В выражении (2) простые сомножители p_j расположены в порядке возрастания, а их степени, наоборот, - в порядке не возрастания, при этом степени минимально возможны (простые числа за вычетом единицы). Это гарантирует минимальность произведения при указанном множестве простых p_j. Первый член в каноническом разложении A_n равен 2^{p_m-1}, где p_m – наибольшее простое, не превышающее n. Последний член в каноническом разложении A_n равен $p_{\sum_{i=1}^{m} s_i}$.

Увеличить степень первого сомножителя можно было бы за счёт исключения последнего сомножителя. Чтобы при этом произведение не увеличилось, должно выполняться: $2^{p_m} < p_{\sum_{i=1}^{m} s_i}$ или, что эквивалентно, $\pi(2^{p_m}) < \sum_{i=1}^{m} s_i$, где $\pi(x)$ – функция распределения простых чисел. Докажем, что это невозможно.

С одной стороны, $P_m > \frac{n}{2}$. При $2^x > 16$: $\pi(2^x) > \frac{2^x}{\ln 2^x} = \frac{2^x}{x \ln 2} > \frac{2^{\frac{n}{2}+1}}{n \ln 2}$.

С другой стороны, $\sum_{i=1}^{m} s_i \le \log_2 n! = \frac{\ln n!}{\ln 2}$,

Так как, по формуле Стирлинга, $n! < \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n}}$,

то $n \ln n! < \frac{n \ln(2\pi n)}{2} + n^2(\ln n - 1) + \frac{1}{12}$.

Поэтому, достаточно доказать, что $2^{\frac{n}{2}+1} > \frac{n \ln(2\pi n)}{2} + n^2(\ln n - 1) + \frac{1}{12}$.

Это утверждение верно при n = 16 (512 > 491) и остаётся верным при возрастании n, так как показательная функция в левой части неравенства растёт быстрее, чем полином в правой.

При $3 \le n \le 15$ утверждение $2^{p_m} > p_{\sum_{i=1}^{m} s_i}$ проверяется непосредственно.

Утверждение 2.

Числа вида $2^k!$ при $k \ge 2$ не являются красивыми.

Доказательство.

Пусть $n = 2^k$, тогда степень двойки в каноническом разложении *n!* равна $\frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \frac{n}{8} + \cdots + 1 = n - 1$. В то же время, степень двойки в выражении (2) для A_n равна $p_m - 1 < n - 1$ при $k \ge 2$. Поэтому A_n не кратно *n!*.

Следствие 1.

Не являются красивыми числа *n!* для всех *n* из диапазона $[2^k; P_{m+1} - 1]$, где $p_m < 2^k < p_{m+1}$.

Следствие 2.

Количество некрасивых факториалов бесконечно.

5. Сколько существует красивых факториалов?

Пусть $n! = \prod_{i=1}^{m} p_i^{s_i}$, где p_i – i-е простое число, $s_i > 0$, n > 1. В разделе 4 было рассмотрено одно из чисел, имеющих ровно *n!* натуральных делителей

$$A_n = \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=(\sum_{k=1}^{i-1} s_k)+1}^{\sum_{k=1}^{i} s_k} p_j^{p_{m+1-i}-1} \qquad (2).$$

Утверждение 3.

В минимальном числе, имеющем ровно $n!$ натуральных делителей, степень никакого из простых чисел $p_i \leq n$ не может быть меньше, чем в выражении (2).

Доказательство.

Так как в выражении (2) степени всех сомножителей минимально возможны (простые числа за вычетом единицы), то уменьшить их можно было бы только до нуля.

Предположим, что в минимальном произведении отсутствует множитель $p_k \leq p_m$ (а значит, и все старшие множители). Так как, по утверждению 1, $p_i^{p_{m+1-i}} > p_i^{m+1-i} > p_m$, то добавив сомножитель p_m и уменьшив увеличенную степень любого из меньших сомножителей, можно уменьшить произведение, что противоречит предположению о его минимальности.

Утверждение 4.

Пусть n – простое число, тогда n! – красивое число.

Доказательство.

Степень простого числа $p_i \leq n$ в каноническом разложении $n!$ равна $s_i = \left\lfloor \frac{n}{p_i} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p_i^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p_i^3} \right\rfloor + \cdots + 1 \leq \frac{n-1}{p_i-1}$, а степень числа p_i в выражении (2) для A_n не меньше чем $p_{m+1-i} - 1$, так как $s_i \geq 1$.

Неравенство $(p_a - 1)(p_b - 1) \geq p_{a+b-1} - 1$ при $b = 1$ превращается в тождество, при $a + b < 7$ проверяется непосредственно, а при $a + b \geq 7$ легко доказывается с помощью границ сверху и снизу функции распределения простых чисел, так что $(p_i - 1)(p_{m+1-i} - 1) \geq p_m - 1 = n - 1$, а значит, $p_{m+1-i} - 1 \geq s_i$.

Следствие.

Количество красивых факториалов бесконечно.

Ответ.

1. Доказано, что все праймориалы красивы.
2. Не верно, что все факториалы красивы. Существует бесконечно много красивых факториалов и бесконечно много некрасивых.
3. Количество красивых чисел вида k^7 бесконечно. Количество красивых чисел вида $(p^s)^t$, где p – простое, s – натуральное, бесконечно для любого наперёд заданного натурального t.
4. Существуют всего три красивых числа вида 7^k: 7^4, 7^5 и 7^6. Число вида p_m^k, где p_m – m-е простое число, $p_m \geq 3$, k – натуральное, является красивым, если и только если $m \leq k < p_m$.