О. Б. Полубасов   11.11.2017 г.

===========MM229================

MM229 (7 баллов)

Решения принимаются до 03.11.2017

Петя нарисовал на доске несколько прямых общего положения так, что все попарные точки пересечения прямых попали на чертеж. Вася выписал себе в тетрадь внешний цикл возникшей конфигурации:
(1, 4, 3, 1, 4, 1, 2, 2, 3, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 4, 2, 1, 3). После этого Петя стер рисунок. Сможет ли Вася восстановить:

1) количество прямых;
2) количество элементарных многоугольников:
3) количество выпуклых вершин;
4) количество элементарных отрезков, ограничивающих внешний контур;
5) количество сторон выпуклой оболочки внешнего контура;
6) суммарное число сторон элементарных многоугольников;
7) количество обратных вершин;
8) количество впадин;
9) количество сторон внешнего контура?

========================

Пусть число прямых равно n.

Тогда число точек пересечения v = C(n, 2).

На каждой прямой по (n-2) элементарных отрезка, поэтому всего элементарных отрезков e = n(n-2).

Длина внешнего цикла (число внешних областей) равна 2n. Подсчитав длину внешнего цикла, узнаем n.

По формуле Эйлера, v + f = e + 1, где f – число элементарных многоугольников, поэтому f = C(n-1, 2).

Каждая единица во внешнем цикле соответствует выпуклой вершине, а каждое число k > 1 соответствует k-1 элементарным отрезков внешнего контура и k-2 обратным вершинам.

Таким образом, количество элементарных отрезков внешнего контура равно сумме чисел внешнего цикла за вычетом 2n.

Суммарное число сторон элементарных многоугольников плюс количество элементарных отрезков внешнего контура равно 2e.

Количество сторон внешнего контура равно числу его вершин (учитываются как выпуклые, так и обратные вершины).

Легко проверить, является ли участок внешнего контура между двумя соседними выпуклыми вершинами впадиной. В данном примере все такие участки являются впадинами.

Отсюда получаем однозначные ответы почти на все вопросы задачи.

1. n = 10 прямых, v = 45 точек пересечения, e = 80 элементарных отрезков
2. f = 36 элементарных многоугольников
3. 6 выпуклых вершин
4. 45 – 2n = 25 элементарных отрезков внешнего контура
5. ?
6. 2e – 25 = 135 сторон элементарных многоугольников
7. 2 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1 + 2 + 1 = 11 обратных вершин
8. 6 впадин
9. 6 + 11 = 17 сторон внешнего контура

Не получен однозначный ответ только на вопрос 5. Понятно, что количество сторон выпуклой оболочки внешнего контура не больше числа выпуклых вершин (то есть, 6), но не меньше 3. Легко нарисовать конфигурации, имеющие в выпуклой оболочке 6, 5 и 4 вершины (рис. 1-3). Меньше, видимо, нельзя, так как среди вершин выпуклой оболочки должны быть точки как правее, так и левее прямой DK, как выше, так и ниже прямой AI.

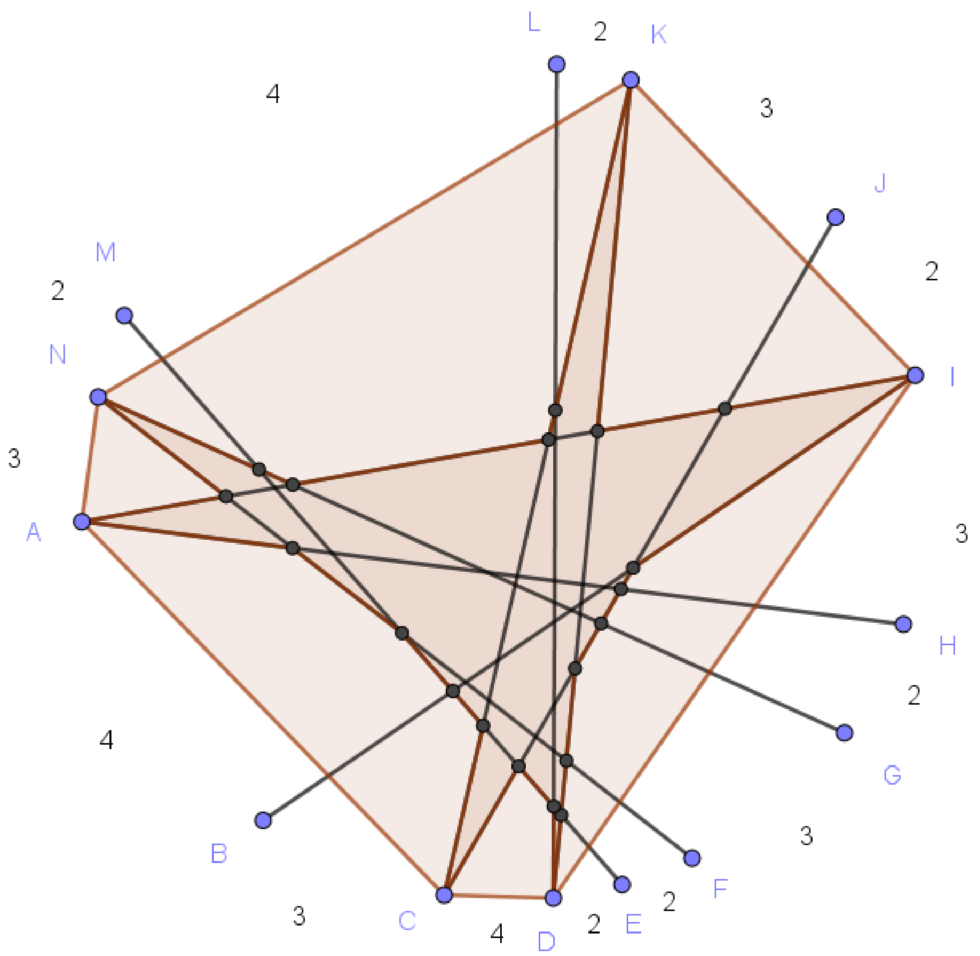

Рис. 1. Выпуклая оболочка содержит 6 вершин.

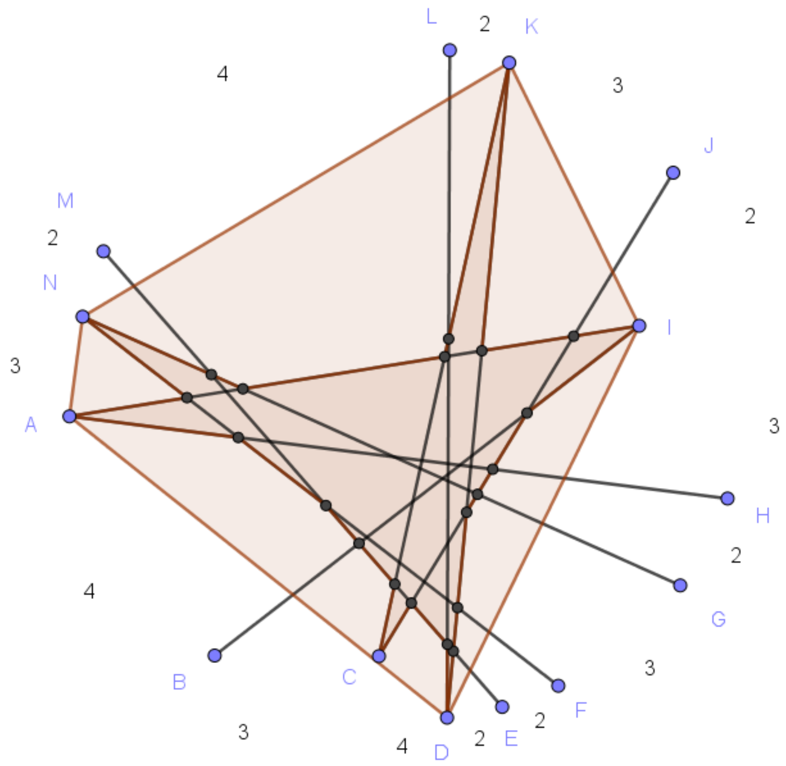

Рис. 2. Выпуклая оболочка содержит 5 вершин.

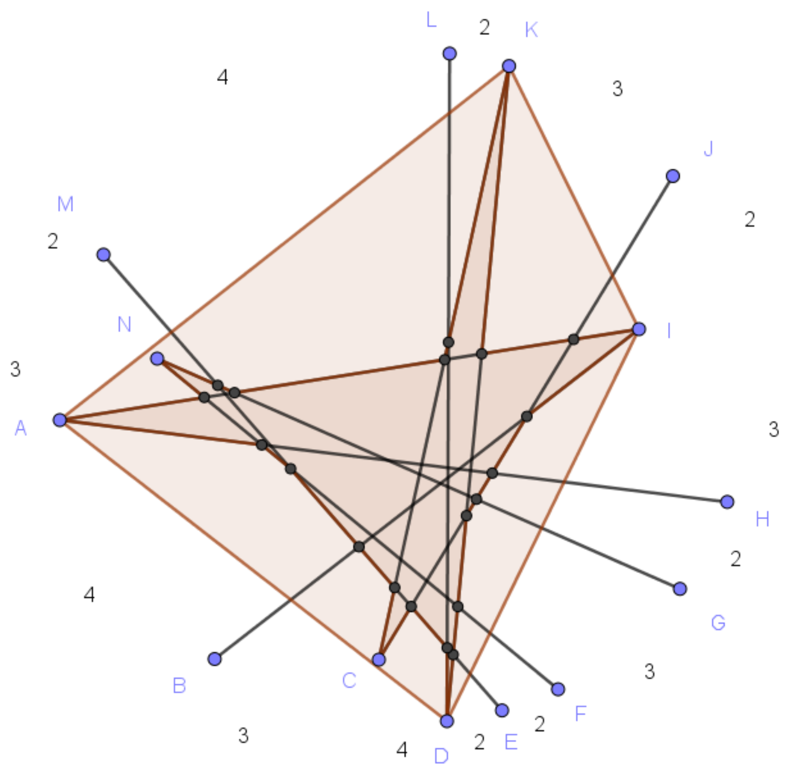

Рис. 3. Выпуклая оболочка содержит 4 вершины.

Ответ. На вопрос 5 ответ «нет», на остальные вопросы ответ «да».

Конечно же, возникает вопрос, насколько точно описывает конфигурацию её внешний цикл?

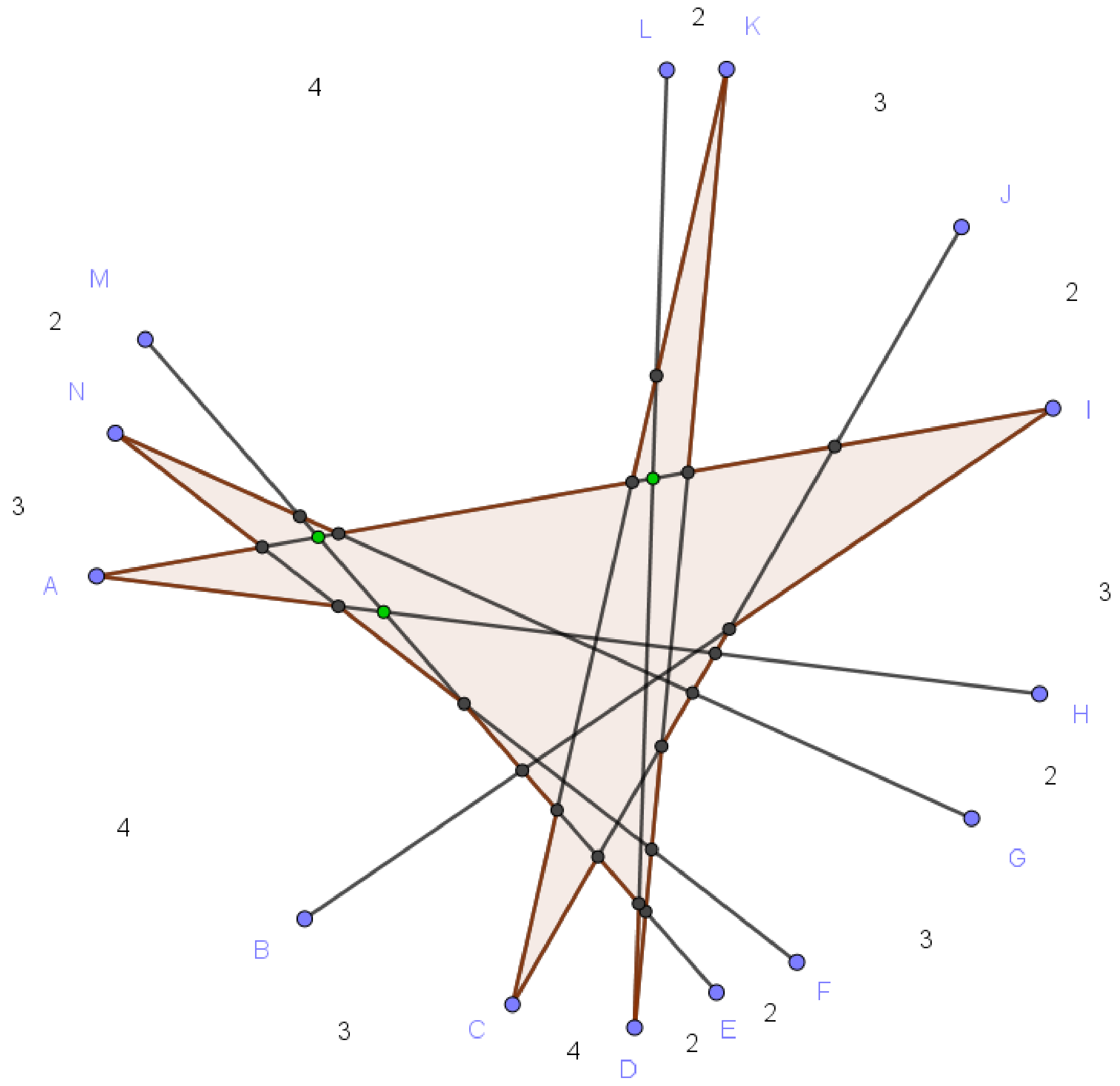

Рис. 4. Одна из возможных конфигураций, имеющая внешний цикл (1, 4, 3, 1, 4, 1, 2, 2, 3, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 4, 2, 1, 3).

Как я построил конфигурацию, показанную на рис. 4? Поскольку все интересные места конфигурации находятся внутри круга, содержащего её выпуклые вершины, то сначала я нарисовал окружность и расположил на ней шесть выпуклых вершин. Выпуклым вершинам соответствуют единицы в описании внешнего цикла. Числа между единицами в описании внешнего цикла описывают внешние области (отсюда немедленно следует, что двух единиц подряд в описании внешнего цикла быть не может). Внешние области разделяются прямыми. Так как всего должно быть 2*10=20 точек пересечения прямых с окружностью, а 2*6=12 из них я уже расположил, то осталось добавить ещё 20-12=8 точек. Точки я обозначил буквами A-N.

Надо провести десять прямых линий. Какую точку соединить с какой? Очень просто. Каждая из десяти прямых должна пересечь девять других внутри круга. Отсчитываем девять точек по окружности, учитывая выпуклые вершины дважды.

Теперь, изменяя расположение точек на окружности, но соблюдая их порядок, надо добиться, чтобы внешние области соответствовали их описанию. Этого удалось достичь без труда. При этом сразу выяснилось, что отношение (элементарный отрезок внешнего контура → прямая) вычисляется однозначно.

Итак, внешний контур определяется однозначно. А что можно сказать про элементарные многоугольники? Две зелёные точки на прямой AI расположены между точек контура, поэтому относительный порядок пересечения прямой AI с другими прямыми определён однозначно.

После этого однозначно определяется и расположение третьей зелёной точки, расположенной на прямой ME, так что относительный порядок пересечения прямой ME с другими прямыми тоже определён однозначно.

Для пересечений остальных прямых можно указать только частичные порядки.