О. Б. Полубасов   08.12.2017 г.

===========MM230================

MM230 (15 баллов)

Решения принимаются до 01.12.2017

Может ли вектор граней конфигурации нескольких прямых общего положения начинаться с чисел 157, 5250, 52?

========================

Пусть AB – произвольный элементарный отрезок на внешнем контуре конфигурации (рис. 1), внутренность контура расположена снизу от отрезка. Пусть отрезок AB принадлежит прямой CD. Остальные участки прямой CD не обязательно ограничивают внешний контур.

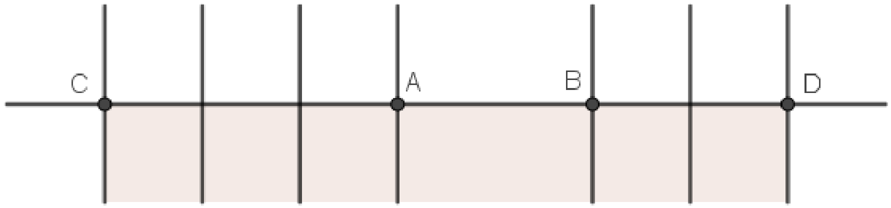

Рис. 1. Прямая CD пересекает 7 других прямых конфигурации. Элементарный отрезок AB лежит на внешнем контуре.

Добавим к конфигурации ещё две прямые EF и GH, расположенные почти параллельно прямой CD, то есть, пересекающие остальные прямые конфигурации в том же порядке, что и прямая CD. Пусть друг с другом и с прямой CD новые прямые пересекаются, как показано на рис. 2.

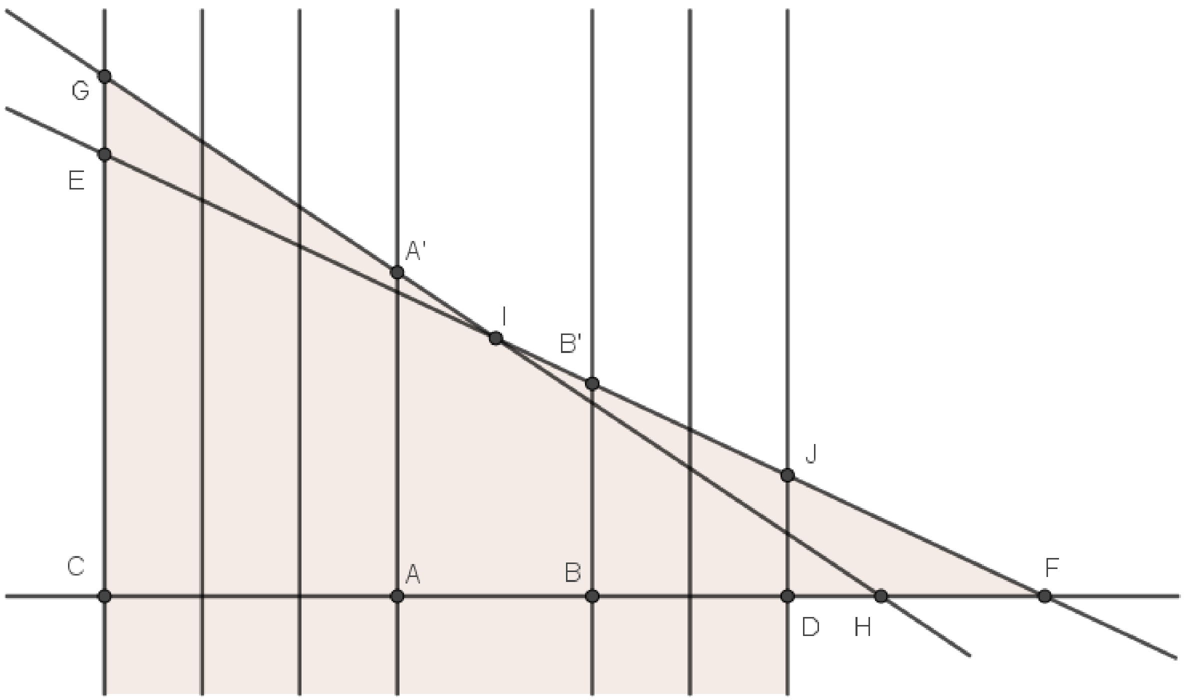

Рис. 2. К конфигурации добавлены прямые EF и GH.

Если в конфигурации было n прямых, то после добавления двух новых прямых также добавятся 3 элементарных треугольника, 2n-5 элементарных четырёхугольника и один элементарный пятиугольник. Длина внешнего контура увеличится на шесть из-за добавления шести точек: E, F, G, H, I и J.

Теперь рассмотрим звёздчатый многоугольник, образованный 2m+1 прямыми, $m \geq 3$ (рис. 3). Его вектор граней содержит 2m+1 треугольников, (2m+1)(m-2) четырёхугольников и один 2m+1-угольник. Внешний контур ограничен 4m+2 элементарными отрезками.

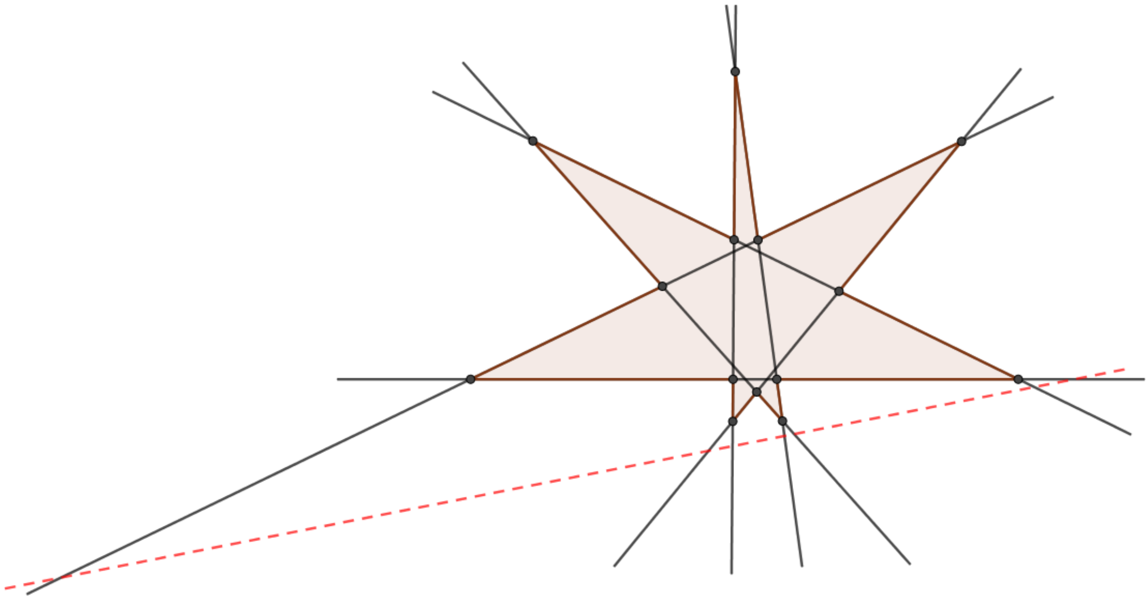

Рис. 3. Звёздчатый многоугольник, образованный 2m+1 прямыми при m = 3.

Добавим к конфигурации пунктирную прямую. Получим вектор граней, содержащий 3m+1 треугольников, (2m+1)(m-2) четырёхугольников, m пятиугольников и один 2m+1-угольник. Внешний контур ограничен 4m+4 элементарными отрезками (рис. 4).

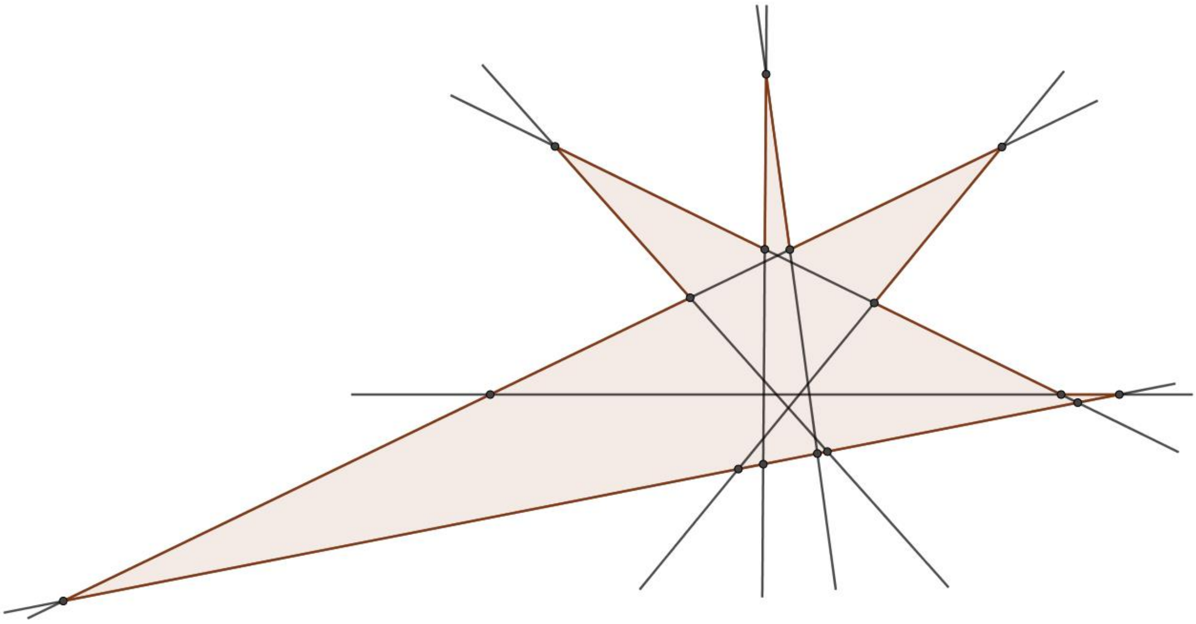

Рис. 4. Конфигурация, получившаяся после добавления ещё одной прямой, имеет вектор граней (10, 7, 3, 0, 1) и внешний контур, ограниченный 16 элементарными отрезками.

Если к этой конфигурации k раз применить описанную выше операцию добавления двух прямых, то получим конфигурацию 2m+2k+2 прямых, имеющую вектор граней (3m+3k+1, (2m+2k+1)(m+k-2), m+k, …), ещё один 2m+1-угольник и внешний контур, ограниченный 4m+6k+4 элементарными отрезками.

Положив m+k = 52, получим конфигурацию 106 прямых, имеющую вектор граней (157, 5250, 52, …), ещё один 2m+1-угольник и внешний контур, ограниченный 2k+212 элементарными отрезками, то есть, как раз такую, про которую спрашивается в условии задачи.

Так как при каждой операции добавления можно произвольно выбирать элементарный отрезок AB на внешнем контуре, то можно построить очень много различных финальных конфигураций.

Во всех построенных конфигурациях большой многоугольник имеет нечётное число сторон 2m+1 (от 7 до 105). Можно ли построить конфигурации, в которых большой многоугольник имеет чётное число сторон? Да, путём небольшого «шевеления» прямых одну из вершин большого многоугольника легко перенести на внешний контур (рис. 5).

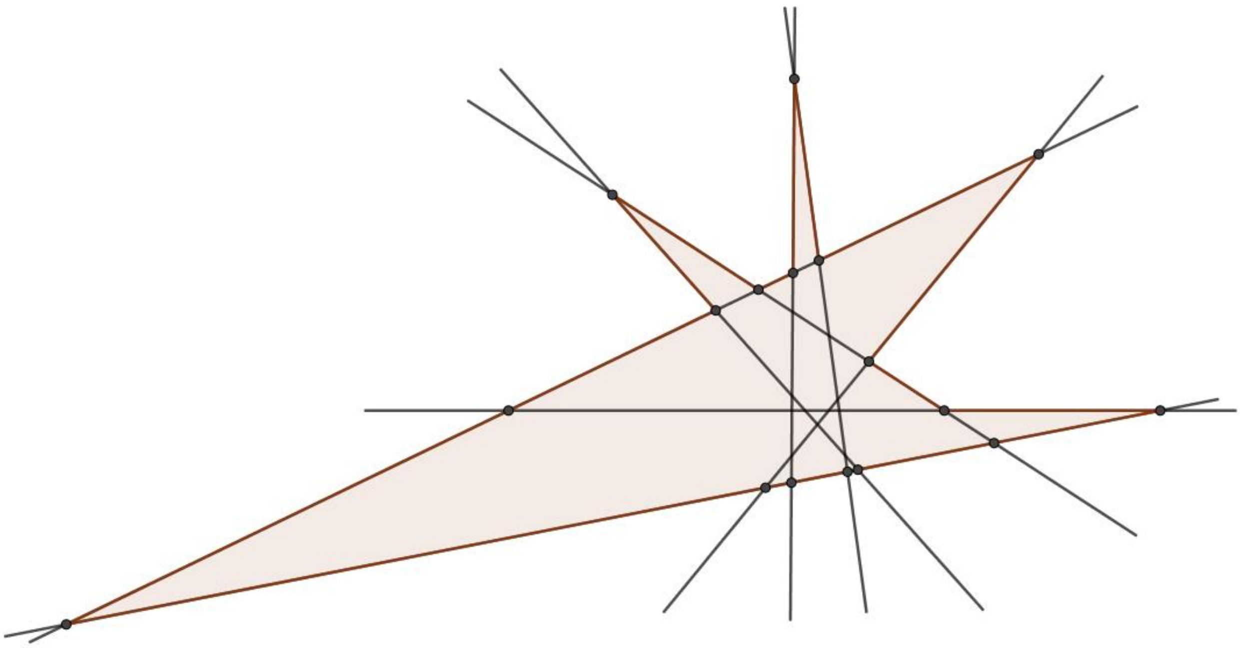

Рис. 5. Конфигурация 8 прямых, имеющая вектор граней (10, 7, 3, 1, 0) и внешний контур, ограниченный 17 элементарными отрезками.

Положив m+k = 52, получим конфигурацию 106 прямых, имеющую вектор граней (157, 5250, 52, …), ещё один 2m-угольник и внешний контур, ограниченный 2k+213 элементарными отрезками. Конфигурацию, в которой большой многоугольник имеет 106 или более сторон, таким способом построить нельзя.

Теперь зададимся вопросом, может ли требуемая в задаче конфигурация содержать не 106 прямых, а меньше или больше?

Число элементарных многоугольников равно C(n-1, 2). C(106-1, 2) = 5460 = 157 + 5250 + 52 + 1, поэтому меньше 106 прямых быть не может.

На каждой прямой по (n-2) элементарных отрезка, поэтому всего элементарных отрезков e = n(n-2). Так как каждый элементарный отрезок инцидентен ровно двум граням (включая внешний контур), то число элементарных отрезков на внешнем контуре

$$E_{\text{внеш}} = 2e - \sum_{i=3}^{n} if_i \le 2n(n-2) - (3*157 + 4*5250 + 5*52$$
$$+6*\big(C(n-1,2) - (157+5250+52)\big) = 11023 - (n-2)(n-3).$$

Если n ≥ 107, то $E_{\text{внеш}} \le 103$, то есть, меньше чем n. Так как каждая прямая должна пересекать внешний контур хотя бы в двух точках, а через каждую точку пересечения проходят ровно две прямые, то внешний контур должен содержать не менее n точек, а значит, не менее n элементарных отрезков. Следовательно, требуемая в задаче конфигурация не может содержать более чем 106 прямых.

Ответ. Да. Существуют подходящие конфигурации 106 прямых, содержащие заданные грани и ещё одну грань любого размера от 6 до 105. Других подходящих конфигураций не существует.

Дополнение

В задаче MM230 рассматривается довольно частный вопрос. В то же время, при знакомстве с конфигурациями прямых общего положения возникает много и других интересных вопросов более общего характера.

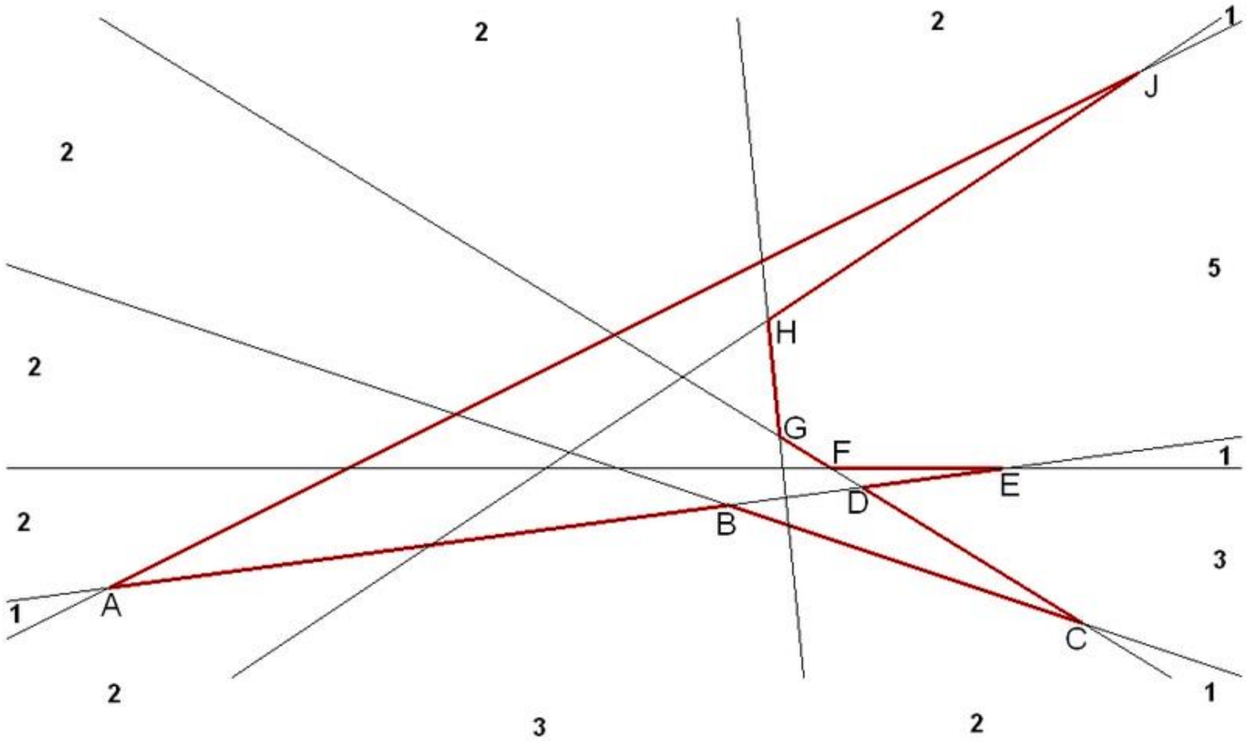

Рис. 6. Пример конфигурации из пояснения к задачам MM228 – MM230.
Внешний цикл: (1, 2, 3, 2, 1, 3, 1, 5, 1, 2, 2, 2, 2, 2).

Выше было доказано, что внешний контур конфигурации n > 2 прямых должен содержать не менее n элементарных отрезков. Эта нижняя оценка достигается при n = 3, но для больших n она слишком груба: уже при n = 4 внешний контур содержит 6 отрезков. Докажем, что и для любого n ≥ 5 можно построить конфигурацию, внешний контур которой содержит 2n-2 элементарных отрезка, а также докажем, что эта оценка не улучшаема.

Разобьём внешний цикл на цепочки, начинающиеся с единицы и заканчивающиеся непосредственно перед следующей единицей. Таких цепочек в цикле не менее трёх. Например, конфигурация на рис. 6 имеет 4 цепочки: (1, 2, 3, 2), (1, 3), (1, 5) и (1, 2, 2, 2, 2, 2). Цепочки, не содержащие чисел, больших 2, - это в точности стороны внешнего контура, расположенные между двумя выпуклыми вершинами (сторона JA на рис. 6). Эти стороны пересекаются всеми остальными прямыми, и поэтому такие цепочки всегда имеют длину n-1, где n – число прямых. Отсюда сразу следуют два вывода:

1. Сумма чисел такой цепочки равна 2n-3.
2. Так как длина внешнего цикла равна 2n, то при n > 3 в цикле не поместится больше двух таких цепочек.

Каждая из остальных цепочек содержат хотя бы одно число, большее 2, и поэтому сумма чисел в этих цепочках не меньше их удвоенной длины. Вычисляя сумму цикла, получаем, что она не может быть меньше 4n-2. Чтобы минимизировать сумму, внешний цикл должен содержать как можно больше цепочек, не содержащих чисел, больших 2. От цикла остаются ещё два числа с суммой 4. Из этих двух чисел можно составить только цепочку (1, 3), поэтому внешний цикл должен иметь вид: $(1, \underbrace{2, \dots, 2}_{n-2}, 1, \underbrace{2, \dots, 2}_{n-2}, 1, 3)$.

Количество элементарных отрезков внешнего контура на 2n меньше суммы чисел внешнего цикла, а значит, не может быть меньше 2n-2.

Возьмём произвольную конфигурацию n-2 ≥ 3 прямых (рис. 7) и выберем любую выпуклую вершину A.

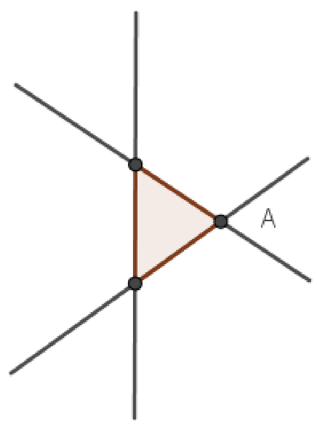

Рис. 7. Конфигурация n-2 ≥ 3 прямых.

Добавим в конфигурацию ещё две прямые, так чтобы все вершины прежней конфигурации, кроме A, перестали быть внешними. Вершина A при этом превратится в обратную (рис. 8). Полученная конфигурация имеет внешний контур, ограниченный 2n-2 элементарными отрезками.

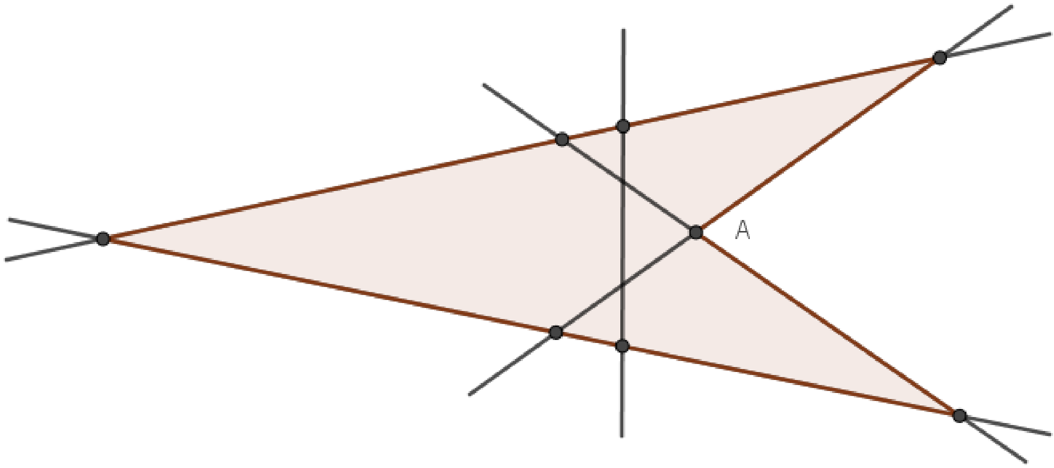

Рис. 8. Конфигурация, получившаяся после добавления ещё двух прямых, имеет внешний контур, ограниченный 2n-2 элементарными отрезками.

Любая конфигурация, имеющая внешний цикл $(1, \underbrace{2, \dots, 2}_{n-2}, 1, \underbrace{2, \dots, 2}_{n-2}, 1, 3)$, имеет во внешнем контуре ровно три выпуклые вершины и одну обратную. Других конфигураций, содержащих во внешнем контуре 2n-2 элементарных отрезка, не существует, поэтому описанным способом можно построить все возможные конфигурации ($n \geq 5$) с таким свойством, и даже каждую ровно один раз, если при переборе вершин A на рис. 7 учитывать симметрию выпуклых вершин.