Олег Полубасов   26.09.2020 г.

===========MM254===============

MM254 (6 баллов)

Решения принимаются до 26.09.2020

Вася вписал круг в треугольник со сторонами 3, 4, 5. И вписывает новые круги так, что каждый последующий касается двух сторон треугольника и одного из предыдущих кругов. Может ли суммарная площадь кругов превысить 80% от площади треугольника и на каком шаге (круге) может случиться это событие?

Рассмотрим последовательность кругов, вписанных в угол величиной 2α.

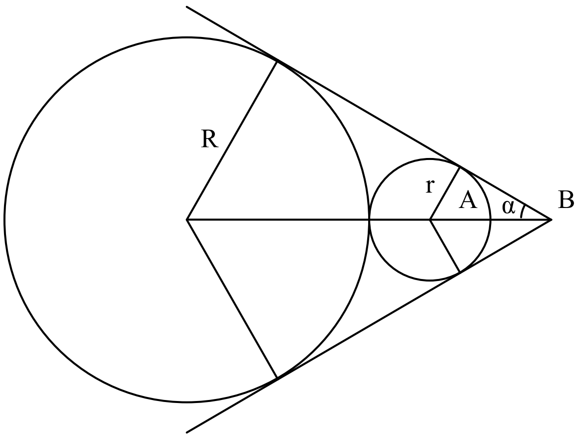

Рис. 1. Два круга вписаны в угол величиной 2α.

Так как $(R + 2r + |AB|) \sin \alpha = R$, $(r + |AB|) \sin \alpha = r$, то $(R + r) \sin \alpha = R - r$, $r = R(1 - \sin \alpha)/(1 + \sin \alpha)$. То есть, последовательность площадей кругов образует геометрическую прогрессию со знаменателем
$q = r^2/R^2 = (1 - \sin \alpha)^2/(1 + \sin \alpha)^2$.

В нашем случае:

$\cos 2\alpha = 3/5$, $\sin \alpha = \sqrt{(1 - \cos 2\alpha)/2} = \sqrt{5}/5$,
$q_a = (5 - \sqrt{5})^2/(5 + \sqrt{5})^2$.
$Sum_a = q_a/(1 - q_a) = 3\sqrt{5}/10 - 1/2$.

$\cos 2\beta = 4/5$, $\sin \beta = \sqrt{(1 - \cos 2\beta)/2} = \sqrt{10}/10$,
$q_b = (10 - \sqrt{10})^2/(10 + \sqrt{10})^2$.
$Sum_b = q_b/(1 - q_b) = 11\sqrt{10}/40 - 1/2$.

$\sin (\pi/4) = \sqrt{2}/2$,
$q_c = (2 - \sqrt{2})^2/(2 + \sqrt{2})^2$.
$Sum_c = q_c/(1 - q_c) = 3\sqrt{2}/8 - 1/2$.

$Sum = 1 + Sum_a + Sum_b + Sum_c = 3\sqrt{5}/10 + 11\sqrt{10}/40 + 3\sqrt{2}/8 – 1/2 \approx$ 1.570776835686. (5 значащих цифр числа $\pi/2$!)

Отношение площадей $(3\sqrt{5}/10 + 11\sqrt{10}/40 + 3\sqrt{2}/8 – 1/2) * \pi / S \approx$ 0.8224568 > 80%. Значит, суммарная площадь кругов превышает 80% площади треугольника. Превышение может произойти на любом шаге, начиная с шестого, например, после вписывания центрального круга, по два круга в острые углы и одного круга в прямой угол.

3.141593 + 0.847834 + 0.458352 + 0.228808 + 0.092480 + 0.066873 = 4.835939 > 4.8 = 0.8 * 6.

Ответ. Суммарная площадь вписанных кругов может превысить 80% площади треугольника на любом шаге, начиная с шестого.

Рассмотрим равнобедренный прямоугольный треугольник, описанный вокруг окружности с радиусом 1.

Его катет = $2 + \sqrt{2}$, площадь $S = 3 + 2\sqrt{2}$,
$\cos 2\alpha = \sqrt{2}/2$, $\sin \alpha = \sqrt{(1 – \sqrt{2}/2)/2} = \sqrt{2 – \sqrt{2}} / 2$,
$q_a = (6 – \sqrt{2} – 4\sqrt{2 – \sqrt{2}}) / (6 – \sqrt{2} + 4\sqrt{2 – \sqrt{2}})$.
$Sum_a = q_a/(1 – q_a) = (6 – \sqrt{2}) / 8\sqrt{2 – \sqrt{2}} – 1/2$.

$\sin (\pi/4) = \sqrt{2}/2$,
$q_c = (2 – \sqrt{2})^2/(2 + \sqrt{2})^2$.
$Sum_c = q_c/(1 – q_c) = 3\sqrt{2}/8 – 1/2$.

$Sum = 1 + 2Sum\ a + Sum\ c = (6 – \sqrt{2}) / (4\sqrt{2 – \sqrt{2}}) + 3\sqrt{2}/8 – 1/2$.

Отношение площадей $Sum*\pi/S \approx 0.823737$.

Рассмотрим равносторонний треугольник, описанный вокруг окружности с радиусом 1.

Его высота 3, сторона $2\sqrt{3}$, площадь $S = 3\sqrt{3}$, $\sin \alpha = 1/2$,
$q = (1 – 1/2)^2/(1 + 1/2)^2 = 1/9$.
$Sum = 1 + 3q/(1 – q) = 11/8$.
Отношение площадей $Sum*\pi/S = 11\pi\sqrt{3}/72 \approx 0.8313247$.

На другом полюсе находятся треугольники, у которых один угол очень острый, а два других – почти прямые, или два угла очень острые, а третий – почти развёрнутый. Для обоих этих треугольников отношение суммарной площади вписанных кругов к площади треугольника стремится к отношению площади круга к площади квадрата, то есть, к $\pi/4 \approx 0.785398$.