Решение задачи Матмарафона ММ259, Овчинников Денис

30 октября 2020 г.

Исключение случаев. Заметим в первую очередь, что если треугольный ABC - правильный, то указанные три точки совпадают, поэтому ответ на все вопросы отрицательный. В равнобедренном треугольнике точки различны, но все еще лежат на одной прямой - оси симметрии треугольника, и ответ тоже "нет". Поэтому в дальнейшем предполагается, что мы рассматриваем только треугольники с попарно различными сторонами.

В остроугольном треугольнике все эти точки лежат внутри него, следовательно, равенство площадей здесь не наблюдается, а тем более равенство самих треугольников. Докажем, что подобия здесь тоже не будет.

Обозначим вершины треугольника так, чтобы $AC > AB > BC$ (соответственно, $\angle B > \angle C > \angle A$), и введем координатную систему (с началом $O(0,0)$) таким образом, чтобы двумя вершинами треугольника были точки $A(-1,0), C(1,0)$, а третья точка находилась в первом квадранте, обозначим ее $B(3a, 3h)$, где a, h полагаем параметрами. Как легко установить, площадь треугольника ABC равна $3h$. Двумя параметрами a, h полностью определяется положение всех центров треугольника, то есть, аналитические выражения для их координат, площади нового треугольника и всех его углов. Таким образом, ответ на задачу совпадает с ответом на вопрос о разрешимости некоторых равенств. Они включат в себя тригонометрические фукнции и радикалы, поэтому нахождение точного аналитического решения затруднительно, хотя численно задача разрешима. Используем несколько иной подход.

Обозначим центроид (то есть точку пересечения медиан) буквой M, центр вписанной окружности P, описанной - Q и рассмотрим некоторые свойста этих точек.

M. Центроид делит любую медиану, в частности, отрезок BO в отношении 2:1, поэтому его координата $M(a, h)$. Если провести через эту точку прямые, параллельные осям, плоскость разделится на *вспомогательные четверти* - в дальнейшем они нам пригодятся.

P. Радиус вписанной окружности определяется по формуле $r = \frac{S}{p}$, где $S = 3h$ - площадь треугольника ABC, p - его полупериметр. Так как сторона $AC = 2$ - самая длинная, то $2p = AB+BC+AC < 3AC = 6$, а по неравенству треугольника, $2p = AB + BC + AC < 2AC > 4$. Следовательно, $2 < p < 3$, и $h < r < \frac{3h}{2}$, следовательно, P лежит выше центроида M.

Рассмотрим треугольники AOB и COB и запишем теоремы синусов для обоих:

$$\frac{\sin \angle ABO}{AO} = \frac{\sin \angle BAO}{BO}$$

$$\frac{\sin \angle CBO}{CO} = \frac{\sin \angle BCO}{BO}$$

тогда, поскольку $AO = CO = 1$,

$$\frac{\sin \angle ABO}{\sin \angle BO} = \frac{\sin \angle A}{\sin \angle C} < 1$$

Из последнего соотношения следует, что луч, на котором лежит биссектриса угла $\angle ABC$, находится правее луча, на котором лежит медиана, и, очевидно, левее опущенной из этой вершины высоты. Таким образом, точка P находится в правой верхней *вспомогательной четверти*, более того - в ограниченной ее области (заштрихована на рисунке). Таким образом $MP \leq \sqrt{4a^2 + h^2/4}$.

Q. Очевидно, что центр описанной окружности лежит на оси Oy. Докажем, что ордината точки Q не больше h. Рассмотрим точку $Q_1(0, h)$ и определим величину $AQ_1^2 - BQ_1^2$:

$$AQ_1^2 = AO^2 + OQ_1^2 = 1 + h^2$$

$$BQ_1^2 = BB_1^2 + Q_1B_1^2 = (3a)^2 + (2h)^2$$

(здесь введена точка $B_1(3a, h)$)

$$AQ_1^2 - BQ_1^2 = 1 + h^2 - 9a^2 - 4h^2 = 1 - (9a^2 + 3h^2)$$

Учтем, то $AB < 2$, тогда

$$4 > (1 + 3a)^2 + (3h)^2 = 1 + 6a + 9a^2 + 9h^2,$$

или

$$1 > 2a + 3a^2 + 3h^2 = 9a^2 + 3h^2 - 6a^2 + 2a = 9a^2 + 3h^2 + 2a(1 - 3a) \geq 9a^2 + 3h^2.$$

Последнее неравенство следует из того, что, по построению, $0 \leq 3a \leq 1$.

Таким образом, $AQ_1^2 \geq BQ_1^2$, следовательно, $AQ_1 \geq BQ_1$. Если бы точка Q лежала выше Q_1 на оси Oy, то было бы верно, что $AQ = BQ$, но при этом, из сравнения прямоугольных треугольников, $AQ_1 < AQ = BQ < BQ_1 \leq AQ_1$. Мы пришли к противоречию, следовательно, Q находится ниже Q_1. Две точки могут совпасть тогда и только тогда, когда рассматривается правильный треугольник, но этот случай мы уже исключили.

Из вышесказанного следует, что точка Q находится в левой нижней *вспомогательной четверти*. Рассмотрим лучи MP и MQ. При повороте от одного к другому в любом направлении мы обязательно пройдем полную *вспомогательную четверть* (либо правую нижнюю, либо левую верхнюю), то есть угол поворота в любую сторону больше $\frac{\pi}{2}$, следовательно, $\angle PMQ$ - тупой.

Итак, было показано, что треугольник MPQ - тупоугольный. Поэтому, если треугольник ABC остроугольный (вплоть до прямоугольного), то MPQ не может быть подобным ему, следовательно, для остроугольных треугольников ответ на все вопросы задачи отрицательный. В дальнейшем мы будем рассматривать только случай, когда $\angle ABC$ - тупой. ГМТ точек B в таком случае - правая верхняя четверть круга радиуса 1 с центром в начале координат. То есть мы имеем условие $(3a)^2 + (3h)^2 < 1 \leftrightarrow a^2 + h^2 < \frac{1}{9}$.

Как легко понять, при непрерывном движении точки B по координатной плоскости точки M, P, Q тоже перемещаются непрерывно, следовательно, площади углы - непрерывные функции переменных a, h. Обозначим $s(a,h) = \frac{S(ABC)}{S(MPQ)}, \alpha(a,h) = \frac{\angle ABC}{\angle PMQ}, \beta(a,h) = \frac{\angle BAC}{\angle MQP}$. Тогда решение уравнения $s(a,h) = 1$ соответствует равновеликим треугольникам, решение системы $\alpha(a,h) = 1, \beta(a,h) = 1$ - подобным, а их пересечение - равным треугольникам.

Зафиксируем a и будем менять h в допустимых пределах. На верхней границе ($h \to \sqrt{1/9 - a^2}$) мы имеем прямоугольный треугольник, точки O и Q совпадают. Тогда треугольник MPQ содержится полностью внутри ABC, так что здесь $s(a,h) > 1$. Помимо этого, поскольку угол $\angle PMQ$ - тупой, заведомо $\alpha(a,h) < 1$.

Выясним ординату точки Q: пусть она равна $-H < 0$. Тогда $R = AQ = BQ$; $R^2 = 1 + H^2 = (3a)^2 + (H+h)^2$ следовательно,

$$H = \frac{1-(3a)^2-h^2}{2h}$$

При введенных ограничениях на a, h, как и ожидалось, всегда будет выполняться $H > 0$.

Рассмотрим предельный переход $h \to 0$ при данном a. Координаты двух точек уже определены: $M(a,h)$, $Q(0, -\frac{1-(3a)^2}{2h} + \frac{h}{2})$. Выясним это для точки P. Поскольку угол $\angle ABC$ стремится к развернутому, то, очевидно, что его биссектриса стремится к опущенному перпендикуляру, так что абсцисса точки P стремится к $3a$. Радиус же (равный ординате) вписанной окружности, как уже выше показывалось, находится между h и $3h/2$. Поэтому вершины треугольника MPQ находятся в малых (порядка $o(h)$) окрестностях точек, соответственно, $(a,0), (3a,0), (0, -\frac{1-(3a)^2}{2h})$. Его площадь - с точностью до слагаемых порядка h - равна $a\frac{1-(3a)^2}{2h}$, то есть, $s(a,h\to 0)\to \frac{h^2}{a(1-9a^2)}<1$. Из непрерывности $s(a,h)$ следует, что для данного a существует, по крайней мере, одно значение $h=h_S(a)$ такое, что $s(a,h_S(a))=1$. Таким образом, ГМТ точек B таких, что $S(ABC)=S(MPQ)$ представляет собой непрерывную линию (возможно, что несколько линий) в первом квадранте, правым концом является точка C, левым - начало координат (в обоих случаях имеем предельные переходы к нулевым площадям треугольников). Назовем эту линию *изоареаной*, при малых a она приблизительно чуть выше кривой $h=\sqrt{a(1-9a^2)}$. Ответ на первый вопрос задачи - положительный.

Рассмотрим теперь угол $\angle QMP$ в "предельном"треугольнике. Здесь MP практически лежит на оси Ox, а сторона MQ - стремится к параллельности оси Oy. Следовательно, интересующий нас угол близок к прямому, тогда как угол $\angle ABC$ стремится к развернутому, то есть π. Следовательно, $\alpha(a,h\to 0)>1$, и, как и в предыдущем случае, имеем ГМТ вершин B таких, что тупой угол исходного треугольника равен тупому углу производного от него. Это ГМТ также является некой непрерывной линией (*изоангулой*), определяемой выражением $h_\alpha(a)$. Как и прежде, из общих соображений невозможно точно выяснить однозначность функции h_α и, как следствие, единственность *изоангулы*. Правый ее конец также стремится к точке C. Предельный переход при $a\to 0$ превращает треугольник ABC в равнобедренный, точки, так что точки P,M приближаются к оси Oy, причем P лежит выше M.

Если при этом $h\gg a$, то угол QMP приближается к развернутому, и наоборот, когда $h<a$, угол приближается, как было показано ранее, к прямому. При этом, если не выполняется $h\ll 1$, к прямому приближается угол $\angle ABC$. Это означает, что левый конец *изоангулы* стремится к началу координат по довольно крутой наклонной линии, а сам предельный переход неопределен (в треугольнике нулевой высоты точки $M=P$, поэтому угол $\angle PMQ$ нельзя определить). Другими словами, имеет место соотношение $a\ll h_\alpha(a\to 0)\ll 1$.

Рассмотрим поведение $\beta(a,h)$ вдоль *изоангулы*, где $0<3a<1$.

Как было показано, при малых a треугольник ABC стремится к равнобедренному, так что (учтем, что интересующая нас область находится также и при малых h) $\angle BAC\approx\frac{\pi-\angle ABC}{2}$. Заметим, что: $MP\le\sqrt{4a^2+h^2/4}\approx h/2$, а $PQ>H=\frac{1-9a^2-h^2}{2h}\approx\frac{1}{2h}\gg MP$. Из этого, по теореме синусов, следует, что $\angle MQP\ll\angle MPQ$, то есть, во всяком случае, $\angle MQP<\frac{\pi-\angle QPM}{2}=\frac{\pi-\angle ABC}{2}=\angle BAC$. Следовательно, при малых a, то есть на левом конце *изоангулы* $\beta(a,h_\alpha(a))>1$.

При $3a \to 1$, пределы изменения h сокращаются (то есть гарантированно $h \ll 1$), а точка B приближается к точке C, то есть $\angle BAC \approx \operatorname{tg} \angle BAC \approx \frac{3h}{2}$. Туда же стремится и точка P, точка M приближается к точке с координатами $M'(\frac{1}{3}, 0)$, а Q - стремится к бесконечности.

Поэтому $\angle MQP \approx \angle OQC - \angle OQM' \approx \operatorname{tg} \angle OQM' - \operatorname{tg} \angle OQP' = \frac{1}{H} - \frac{1/3}{H} = \frac{2}{3H} = \frac{4h/3}{1-(3a)^2-h^2}$.

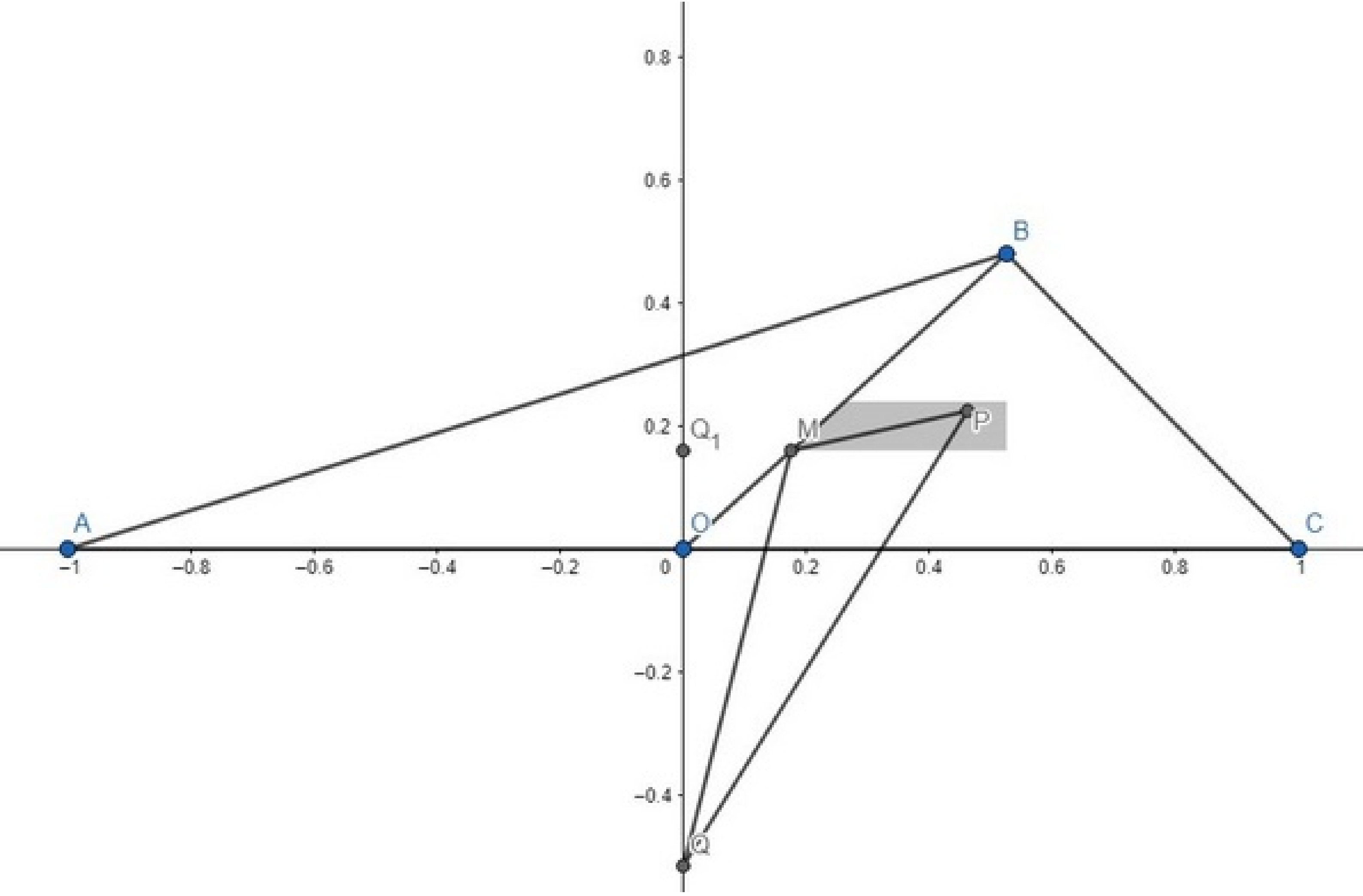
Тогда $\beta(a, h_\alpha(a)) \approx \frac{9h(1-9a^2-h^2)}{8h} \approx \frac{9}{4}(1-3a) \ll 1$ при $1-3a \ll 1 (h \ll 1)$.

Таким образом, поскольку функция $\beta(a, h_a lpha(a))$ непрерывна вдоль *изоангулы*, должна быть хотя бы одна точка B, где она приобретает значение 1. Построенный здесь треугольник ABC порождает треугольник MPQ такой, что два угла у них равны - следовательно, равны все их углы - что означает их подобие. Таким образом, ответ на второй вопрос так же положительный. Назовем такую точку *изоточкой.*

Вышеизложенными рассуждениями нельзя установить и формально доказать единственность такой точки, только ее существование. Так же не устанавлено, возможно ли на *изоангуле* равенство $\angle ACB = \angle MQP$.

Нестрогое (оценочное) обсуждение. Впрочем, качественно можно заметить следующее: при изменении h для некоторого фиксированного a площадь треугольника ABC уменьшается, а угол $\angle ABC$ увеличивается монотонно. При этом радиус описанной окружности так же увеличивается монотонно. Точка M при этом перемещается вниз по вертикали $x = a$ медленнее, чем B и Q (соответственно, со скоростями 3>1, $|\frac{dH}{dh}| = \frac{1-(3a)^2+h^2}{2h^2} > \frac{(3h)^2+h^2}{2h^2} = 5 > 1$). Точка P движется с приблизительно такой же скоростью. Это значит, что вся сторона треугольника MP сдвигается медленнее, чем вершина Q. Практически это означает, что угол $\angle QMP$ монотонно убывает, а обратная ему величина - монотонно возрастает. Следовательно, $\alpha(a, h)$ монотонно возрастает при уменьшении h, так что $h_\alpha(a)$ - однозначная функция, и *изоангула* единственна. Далее - синус угла также возрастает, поэтому площадь треугольника MPQ монотонно возрастает, следовательно, функция $s(a, h)$ убывает тоже монотонно, поэтому $h_S(a)$ тоже однозначна, и *изоареана* единственна.

Определить, для скольких точек *изоангулы* выполняется $\beta(a, h_\alpha(a)) = 1$ таким образом уже не удается, но должно быть ясно, что их конечное число. Если хотя бы одна из них лежит точно на *изоареане*, то треугольники ABC и QMP подобны и имеют равную площадь - то есть равны. Однако, изучая рассуждения выше (в части $\beta(a, h_\alpha(a))|_{3a \to 1} \ll 1$), можно заключить, что *изоточки* находятся вдали от точки $3a = 1$. Но *изоангула* поднимается



0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0.2
0.4
0.6
0.8
1
A
B
C
O
M
P
Q
Q1

резко вверх от нуля, тогда как *изоареана* расположена более полого, как график функции корня. Поэтому вблизи нуля *изоангула* расположена выше *изоареаны*, и далее эта тенденция должна сохраниться, и может быть нарушена лишь вблизи точки C. Учитывая конечность множества *изоточек*, можно с большой долей уверенности предположить, что треугольник QMP не может быть равным ABC.

Подбор с помощью сервиса Geogebra показывает, что *изоточка* в самом деле единственна, приблизительные координаты - $B(0.5257, 0.4798)$, а площади треугольников при этом относятся, как приблизительно 5.4.

Ответ

а Да

б Да

в Нет (доказывается численным моделированием)