Олег Полубасов 1.01.2021 г.

====================

MM264 (4 балла)

Решения принимаются до 24:00 msk 04.04.2020

Назовем пару натуральных чисел a и b аддитивной, если $\tau(a+b) = \tau(a) + \tau(b)$, $\sigma(a+b) = \sigma(a) + \sigma(b)$ и $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$.

Доказать, что существует бесконечно много аддитивных пар.

($\tau(a)$,$\sigma(a)$ и $\varphi(a)$ соответственно число натуральных делителей, сумма натуральных делителей и функция Эйлера числа n.)

==

Найти хотя бы одну такую пару не трудно.

Например, a = 2^3*167, b = 2*3*569, a + b = 2*5^3*19.

$\tau(a)$ = 4*2 = 8, τ(b) = 2*2*2 = 8, τ(a+b) = 2*4*2 = 16 = $\tau(a)$ + τ(b).

$\sigma(a)$ = 15*168 = 2520, $\sigma(b)$ = 3*4*570 = 6840, $\sigma(a+b)$ = 3*156*20 = 9360 = $\sigma(a)$ + σ(b).

$\varphi(a)$ = 2^2*166 = 664, $\varphi(b)$ = 2*568 = 1136, $\varphi(a+b)$ = 4*5^2*18 = 1800 = $\varphi(a)$ + $\varphi(b)$.

Теперь умножим a и b на k > 1, взаимно простое с a, b и a+b. Так как все три функции τ, σ и φ мультипликативны, получим:

$\tau(a$k) = $\tau(a)\tau$(k), τ(b) = τ(b)τ(k), τ(ak+bk) = $\tau(a+$b)τ(k) = $\tau(a$k) + τ(bk),

$\sigma(a$k) = $\sigma(a)\sigma$(k), σ(b) = σ(b)σ(k), σ(ak+bk) = $\sigma(a+$b)σ(k) = $\sigma(a$k) + σ(bk),

$\varphi(a$k) = $\varphi(a)\varphi$(k), φ(b) = φ(b)φ(k), φ(ak+bk) = $\varphi(a+$b)φ(k) = $\varphi(a$k) + φ(bk).

Поскольку чисел, взаимно простых с a, b и a+b, бесконечно много, то утверждение задачи доказано.

Ответ. Доказано конструктивно.

Подходящая базовая пара a и b не единственна. Подходят также:

a = 41*241,	b = 2^2*4597,	a + b = 3^4*349;
a = 2^5*251,	b = 2^2*5*3461,	a + b = 2^2*7*31*89;
a = 2^7*151,	b = 2^3*3*1297,	a + b = 2^3*7*17*53;
a = 2^5*3*991,	b = 2^2*5*31*163,	a + b = 2^2*7^3*11*13;
a = 5*7*29*103,	b = 2^3*5*19*263,	a + b = 3^3*5^2*11*41;
a = 2^2*3*59*89,	b = 2^5*3*5*419,	a + b = 2^2*3^2*11*23*29;
a = 2*3*7*1847,	b = 2^2*3*43*449,	a + b = 2*3^4*23*83;
a = 2^9*283,	b = 2^4*3*11*673,	a + b = 2^4*5*13^2*37;
a = 2^5*3*1873,	b = 2^2*5*37*941,	a + b = 2^2*7*13*29*83;
a = 2^2*3*107*257,	b = 2^5*3*5*1823,	a + b = 2^2*3^2*11*17*179;
a = 2^2*3*113*269,	b = 2^5*3*5*2003,	a + b = 2^2*3^2*11*17*197...

Обобщение

В теории чисел рассматриваются и другие мультипликативные функции, например, функция Мёбиуса μ. Бесконечно ли число таких пар a и b, что $\tau(a+b) = \tau(a) + \tau(b)$, $\sigma(a+b) = \sigma(a) + \sigma(b)$, $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ и $\mu(a+b) = \mu(a) + \mu(b)$?

Ответ на этот вопрос также положительный. Достаточно выбрать множитель k не свободным от квадратов. Да и среди представленных выше пар много таких, что $\mu(a) = \mu(b) = \mu(a+b) = 0$.