MM271

Овчинников Д.А.

11 марта 2022 г.

Заметим, что среди четырех подряд идущих чисел степень любого простого числа, большая единицы, может встретиться в их каноническом разложении не более, чем однократно.

Поэтому, если $p_3^4|(n+3)$, то остальные числа не делятся на p_3^4. Тоже верно и для соотношений $p_2^3|(n+2)$ и $p_1^2|(n+1)$. При этом, по условию, $p_3^5 \nmid (n+3), p_2^4 \nmid (n+2), p_1^3 \nmid (n+1)$. Тогда мы можем записать, что

$$n+1 \equiv r_1 p_1^2 \pmod{p_1^3}$$

$$n+2 \equiv r_2 p_2^3 \pmod{p_2^4}$$

$$n+3 \equiv r_3 p_3^4 \pmod{p_3^5}$$

где $1 \leq r_i < p_i, i = 1, 2, 3$.

По китайской теореме об остатках, такое число n существует. Однако для решения нашей задачи этого недостаточно: может существовать простое p_4 такое, что оно встречается хотя бы дважды в разложении n, либо трижды в разложении $n+1$ и так далее.

Будем выбирать сравнительно небольшие значения для p_i, а следовательно, как можно меньшее n, тогда мы сможем этого избежать. Пусть $p_3 = 2, p_2 = 3, p_1 = 5$. В этом случае система запишется в виде:

$$n+1 \equiv 25r_1 \pmod{125}$$

$$n+2 \equiv 27r_2 \pmod{81}$$

$$n+3 \equiv 16 \pmod{32}$$

Соответственно, $1 \leq r_1 \leq 4, 1 \leq r_2 \leq 2$, и мы получаем сразу 6 систем. Выберем $r_1 = r_2 = 1$:

$$n \equiv 24 \pmod{125}$$

$$n \equiv 25 \pmod{81}$$

$$n \equiv 13 \pmod{32}$$

Решение этой системы - числа вида $n = 324000m + 227149$. Как легко убедиться, для $m = 0$, то есть $n = 227149$ условие выполняется (оно выполнится и для других m). Для других пар r_1, r_2 получаем решения (по модулю 324000): 11149, 75949, 97549, 162349, 205549, 270349, 291949. Для самих этих чисел условие задачи выполняется, но не для их обобщений по модулю 324000. Например, уже $324000 \cdot 4 + 97549 = 41^2 \cdot 829$, то есть такое число не годится.

Можно так же ожидать, что для других наборов $\{p_i\}$ найдутся свои решения, проверять которые предстоит так же перебором.

Машинный перебор позволяет найти наименьшее число n, удовлетворяющее условию задачи - 2022 (с Новым годом!). Заметим, что $2023 = 7 \cdot 17^2$, поэтому обнаружение его тем же образом, каким были получены другие числа затруднительно без угадывания.

Ответ. Да, существуют.

Примечание. Используя приведенный в решении алгоритм, нетрудно, даже без численного перебора, найти и более узкий класс чисел, для которых выполняется дополнительное условие: наивысшая степень в разложении $n + 4$ равна пяти (здесь важно следить за поведением всех чисел, так что, например, p_4 не может быть равным 2). Например, таким числом будет 153415373.