MM272

Овчинников Д.А.

17 марта 2022 г.

Лемма 1. Для любого простого p и натурального t выполнено неравенство $p^t \geq t+1$. Тогда существует такое целое $s \geq 0$, что $p^t = t+s+1$.

Доказательство. Для $t=1$ неравенство приобретает вид $p \geq 2$, что, очевидно верно для всех простых p. Рассмотрим функцию $f(t) = \sqrt[t]{t+1}$. Уже известно, что $f(1) = 2$, выясним поведение функции при больших значениях аргумента. Обозначим $g(t) = \ln f(t) = \frac{\ln(t+1)}{t}$ и выпишем производную $g'(t) = \frac{t-(t+1)\ln(t+1)}{t^2(t+1)}$.

Введем новое обозначение $\varphi(t) = t-(t+1)\ln(t+1)$, $\varphi(0) = 0 - 1 \cdot \ln 1 = 0$. Производная этой функции $\varphi'(t) = -\ln(t+1) \leq 0$ при неотрицательных t, следовательно, $\varphi(t)$ убывает, и $\varphi(t) \leq 0$. Отсюда следует, что $g'(t) \leq 0$, то есть $g(t)$ также убывает, а вследствие монотонности логарифма убывает и $f(t)$. Таким образом, $\forall t \geq 1 : f(t) \leq f(1) = 2 \leq p$. Лемма доказана.

Лемма 2. Неравенство $p^t \geq t+2$ выполняется для всех пар простого p и натурального t, кроме одного случая.

Доказательство. При $t=1$ неравенство выглядит, как $p \geq 3$, что верно для всех нечетных простых p, поэтому пара $\{2,1\}$ - упомянутое в формулировке исключение. При $t=2$ неравенство имеет вид $p^2 \geq 4$, то есть $p \geq 2$, что выполняется уже для всех простых p. Если, как при доказательстве Леммы 1, ввести функцию $f(t) = \sqrt[t]{t+2}$ и провести те же рассуждения, получим функцию $\varphi(t) = t-(t+2)\ln(t+2), \varphi(0) = -\ln 4 < 0, \varphi'(t) = -\ln(t+2) < 0$, так что $f(t)$ убывающая, а значит, неравенство выполнится при всех других парах $\{p,t\}$. Лемма доказана.

Следствие. Для простых p и целых $t > 1$ выполнено $p^{t-1} \geq t+1$, кроме случаев $p = t = 2$ и $t = 1, p$ - любое простое. Альтернативная запись неравенства: $p^t \geq p \cdot (t+1)$. Аналогично предыдущей лемме, при указанных условиях существует целое $s \geq 0$ такое, что $p^t = p(t+s+1)$.

Перейдем непосредственно к задаче. Вопрос в условии можно переформулировать в следующем виде: сколько найдется натуральных m таких, что $\tau(mk) = k$ при заданном k?

Обратим внимание, что само по себе уравнение $\tau(u) = v$ (где u - неизвестная величина, v - параметр) имеет одно решение $u = 1$ при $v = 1$ и неограниченное количество решений при $v > 1$. В частности, годится $u = p^{v-1}$, где p - любое простое. Поскольку τ - мультипликативна, это замечание существенно поможет при решении.

Пусть разложение k на простые множители записывается следующим образом:

$$k = \prod_{i=1}^{N} p_i^{t_i},$$

где $t_i \geq 1, N$ - количество простых делителей p, и мы будем искать m в виде

$$m = r \cdot \prod_{i=1}^{N} p_i^{s_i},$$

где $s_i \geq 0$, а r взаимно просто с k.

Тогда $\tau(mk) = \tau(r) \cdot \prod_{i=1}^{N} \tau(p_i^{t_i+s_i}) = \tau(r) \cdot \prod_{i=1}^{N} (t_i + s_i + 1) = \prod_{i=1}^{N} p_i^{t_i} = k.$

Заметим, что из Леммы 1 следует, что мы всегда можем выбрать такие s_i, чтобы произведения сравнялись, тогда $\tau(r) = 1, r = 1$, и хотя бы одно решение найдется всегда.

Предположим, что в разложении для некоторого нечетного p_j выполнено $t_j \geq 2$. Тогда, по Лемме 2, найдется s'_j такое, что $p_j^{t_j} = p_j(t_j + s'_j + 1)$, остальные s_i выберем с помощью Леммы 1, и мы опять можем сократить произведения, получая $\tau(r) = p_j$, но тогда, как и было указано выше, мы можем взять $r = q^{p_j - 1}$, где q - любое простое, не входящее в разложение k. Значит, у задачи бесконечное количество решений. Тот же вывод получается для тех k, в разложении которых степень числа 2 выше двух.

Таким образом, необходимое условие конечности количества решений - в разложении числа k на простые множители все нечетные множители встречаются только однократно, а число 2 - не более двух раз.

Для удобства обозначим произведение N различных простых чисел P. Из рассуждений выше следует, что нам надо рассматривать случаи $k = P$ или $4P$ (во втором случае P содержит только нечетные сомножители). Рассмотрим их подробнее.

Случай k=4P. Здесь $k = 4 \cdot \prod_{i=1}^{N} p_i$, $m = r \cdot 2^{s_0} \cdot \prod_{i=1}^{N} p_i^{s_i}$, все $p_i \geq 3$. Тогда получаем:

$$\tau(mk) = \tau(r) \cdot (s_0 + 3) \cdot \prod_{i=1}^{N} (s_i + 2) = 4 \prod_{i=1}^{N} p_i.$$

Если $N > 0$ (т. е. $P \neq 1$), выберем $s_0 = p_1 - 3 \geq 0, s_1 = 2, s_i = p_i - 2$ (при $i > 1$, если такие множители есть). Как видно, в этом случае $\tau(r) = 2$, то есть r - некоторое простое, не входящее в разложение k, и $m = r \cdot 2^{p_1 - 3} \cdot p_1^2 \cdot \prod_{i=2}^{N} p_i^{p_i - 2}$ дает решение задачи для любого такого r. Понятно, что количество решений бесконечно, как и в общем случае.

Случай k=4. В этом случае мы имеем то же самое, что в предыдущем абзаце, но при $N = 0$, тогда уравнение будет сокращено до вида: $\tau(r) \cdot (s_0 + 3) = 4$. Нетрудно заметить, что, поскольку $s_0 + 3 \geq 3$, то есть лишь одна возможность: $s_0 = 1, \tau(r) = 1$, откуда $m = 2$ - то есть в этом случае существует только одно решение.

Можно явно убедиться, что уравнению $\tau(n) = 4$ удовлетворяют числа вида $n = p^3$ и pq (где p, q - простые). Из таких чисел кратно четырем только 8.

k=P Повторим те же действия: запишем $k = \prod_{i=1}^{N} p_i$, $m = r \cdot \prod_{i=1}^{N} p_i^{s_i}$, причем $p_i \geq 2$, тогда

$$\tau(mk) = \tau(r) \cdot \prod_{i=1}^{N} (s_i + 2) = \prod_{i=1}^{N} p_i.$$

Обратим внимание, что в левой части находится *по крайней мере* N множителей, не меньших 2, а в правой - *ровно* N различных простых множителей. Следовательно, для каких-то i, j должно быть взаимно-однозначное соответствие $s_i + 2 = p_j$. Поскольку $p_j \geq 2$, то в любом случае мы гарантируем, что $s_i = p_j - 2 \geq 0$. При этом так же верно, что $\tau(r) = 1$, и $r = 1$. Значит, решением задачи будет число $m = \prod_{i=1}^{N} p_i^{p_{j_i} - 2}$, где j_i - некая перестановка $\{1, ..., N\}$. Поскольку p_j все различны, то и s_i тоже будут различны, и кратных решений нет. Таким образом, количество решений в этом случае равно количеству перестановок, то есть $N!$.

Для примера рассмотрим $k = 2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$. Решения исходного уравнения могут быть видов $n = p^{69}, pq^{34}, p^4q^{13}, p^6q^9, pq^4r^6$. На 70 может делиться лишь последняя комбинация, и при условии, что наборы $\{p, q, r\}, \{2, 5, 7\}$ совпадают в каком-то порядке. Видно, что в данном случае всего есть 6(=3!) вариантов выбора значений этих чисел.

В заключение приведем пример с бесконечным количеством решений. Например, при $k = 3^2 \cdot 11 = 99$. Тогда $\tau(n) = 3 \cdot 3 \cdot 11$, и рассмотрим, например, его решения вида $n = p^2q^2r^{10}$. Пусть $p = 3, q = 11$, так что $n = 1089 \cdot r^{10}$ заведомо делится на 99. При этом в качестве r мы можем выбрать любое простое, кроме 3 и 11, значит, решений действительно бесконечное количество.

Ответ. Для $k \in \{1,\ 4\}$ - одно решение.

Для k, в разложении которого на простые множители каждый этих множителей встречается ровно один раз - $N!$ решений, где N - количество этих множителей.

Для всех других k - бесконечное количество решений.