

ММ275

Точки вокруг треугольника

Будем говорить, что треугольник относится к классу k , если на плоскости существует ровно k точек таких, что выпуклый четырехугольник с вершинами в вершинах исходного треугольника и в данной точке разбивается своей диагональю, являющейся стороной исходного треугольника, на 2 подобных треугольника.

Какие значения может принимать k ?

Если в выпуклом четырёхугольнике $ABCT$, AC является диагональю, то второй диагональю будет BT , поэтому AB и BC в этом случае не могут являться диагоналями, а значит в выпуклом четырёхугольнике $ABCT$ диагональю всегда будет являться ровно одна сторона треугольника ABC

Если в выпуклых четырёхугольниках $ABCT_1$ и $ABCT_2$, диагональю является AC , для того чтобы точки T_1 и T_2 совпадали, для этого необходимо и достаточно чтобы выполнялись две равенства

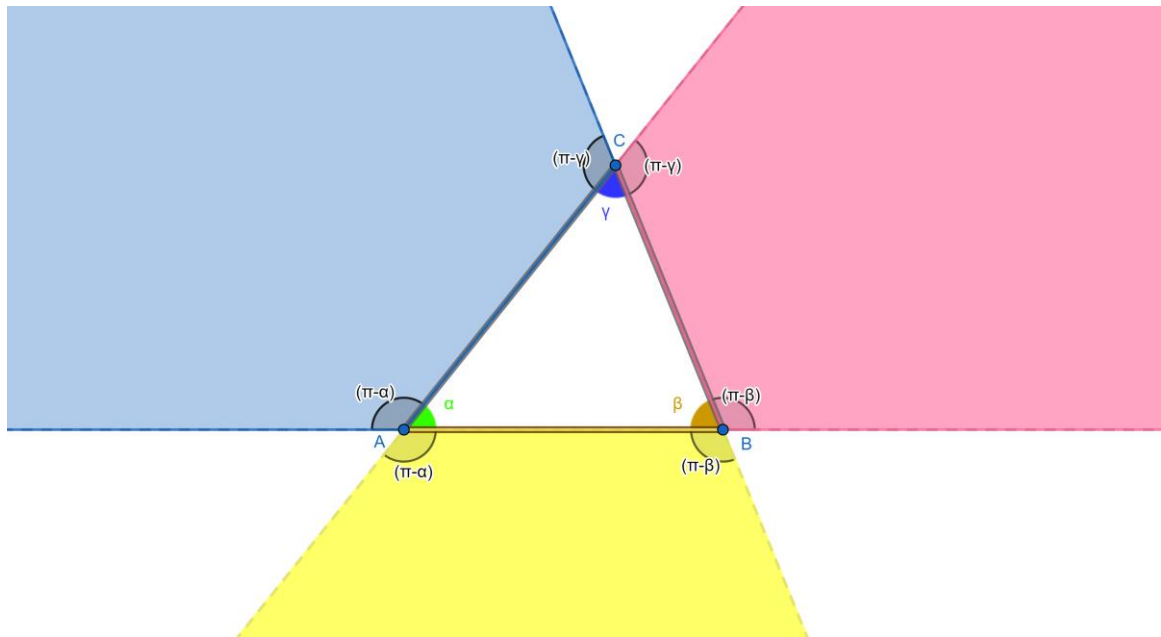
$$1. \angle ACT_1 = \angle ACT_2 \quad 2. \angle CAT_1 = \angle CAT_2$$

Если в выпуклом четырёхугольнике $ABCT$, AC является диагональю, то $\angle TAC < (\pi - \alpha)$;
 $\angle TCA < (\pi - \gamma)$;

Также, когда BC является диагональю, то $\angle TBC < (\pi - \beta)$; $\angle TCB < (\pi - \gamma)$;

А когда диагональ AB , то $\angle TAB < (\pi - \alpha)$; $\angle TBA < (\pi - \beta)$;

На рисунке в бесцветных областях и на «граничащих» линиях, «точки» не могут присутствовать, и если «точка» присутствует внутри некой «цветной области», то диагональю выпуклого четырёхугольника $ABCT$, который совместно будет являться и стороной треугольника ABC , будет являться именно та сторона треугольника, которая граничит с этой областью и на рисунке имеет тот-же цвет что и эта область.



Так как дело имеем с подобием треугольников, значит можем ограничиться рассмотрением углов.

- 1) Если в выпуклом четырёхугольнике ABCD, AC является диагональю, то существует не более $3! = 6$ вариантов для $\angle CAT$; $\angle CTA$ и $\angle ACT$ при котором треугольник ACT будет подобен треугольнику ABC
 1. $\angle CAT = \alpha$; $\angle CTA = \beta$; $\angle ACT = \gamma$
 2. $\angle CAT = \alpha$; $\angle CTA = \gamma$; $\angle ACT = \beta$
 3. $\angle CAT = \beta$; $\angle CTA = \alpha$; $\angle ACT = \gamma$
 4. $\angle CAT = \beta$; $\angle CTA = \gamma$; $\angle ACT = \alpha$
 5. $\angle CAT = \gamma$; $\angle CTA = \alpha$; $\angle ACT = \beta$
 6. $\angle CAT = \gamma$; $\angle CTA = \beta$; $\angle ACT = \alpha$

Но попарно разных вариантов будет 6, тогда и только тогда, когда α , β , γ попарно разные, и углы α и γ острые (то есть $< \pi/2$).

- 2) Но в случае, когда α , β , γ попарно разные, и один из двух углов треугольника ABC, примыкающих к стороне AC (то есть, α либо γ) $\geq \pi/2$, то в этом случае для выпуклого четырёхугольника ABCD с диагональю AC, остаётся 4 варианта, при котором треугольник ACT будет подобен треугольнику ABC например, когда $\alpha \geq \pi/2$ и α , β , γ попарно разные, то для $\angle CAT$; $\angle CTA$ и $\angle ACT$ остаются
 1. $\angle CAT = \beta$; $\angle CTA = \alpha$; $\angle ACT = \gamma$
 2. $\angle CAT = \beta$; $\angle CTA = \gamma$; $\angle ACT = \alpha$
 3. $\angle CAT = \gamma$; $\angle CTA = \alpha$; $\angle ACT = \beta$
 4. $\angle CAT = \gamma$; $\angle CTA = \beta$; $\angle ACT = \alpha$

Так как в этом случае $\angle CAT$ не может равняться α .

- 3) Если из углов α , β , γ , двое равняются друг друга, а третий отличается от них, и углы α и γ меньше $\pi/2$, то в этом случае для выпуклого четырёхугольника $ABCT$ с диагональю AC , существует 3 варианта, при котором треугольник ACT будет подобен треугольнику ABC , например, при $\alpha=\beta$, $\gamma < \pi/2$ то $\angle CAT$; $\angle CTA$ и $\angle ACT$ могут принимать следующие значения
1. $\angle CAT=\alpha$; $\angle CTA=\alpha$; $\angle ACT=\gamma$
 2. $\angle CAT=\alpha$; $\angle CTA=\gamma$; $\angle ACT=\alpha$
 3. $\angle CAT=\gamma$; $\angle CTA=\alpha$; $\angle ACT=\alpha$
- 4) А если из α , β , γ двое равняются друг друга, третий отличается от них и один из двух углов (α либо γ) больше $\pi/2$, то в этом случае для выпуклого четырёхугольника $ABCT$ с диагональю AC , существует 2 варианта, при котором треугольник ACT будет подобен треугольнику ABC . Например, при $\alpha=\beta$, $\gamma \geq \pi/2$ то углы $\angle CAT$; $\angle CTA$ и $\angle ACT$ могут принимать следующие значения
1. $\angle CAT=\alpha$; $\angle CTA=\gamma$; $\angle ACT=\alpha$
 2. $\angle CAT=\gamma$; $\angle CTA=\alpha$; $\angle ACT=\alpha$

Так как, в этом случае, $\angle ACT$ не может равняться γ

- 5) А если $\alpha=\beta=\gamma=\pi/3$ то в этом случае для выпуклого четырёхугольника $ABCT$ с диагональю AC , существует всего один вариант при котором треугольник ACT будет подобен треугольнику ABC , и это: $\angle CAT=\angle CTA=\angle ACT=\pi/3$

Дальше множество треугольников разобьём на 5 групп

1. Равносторонние
2. Равнобедренные, у которых угол у вершины не менее 90 градусов
3. Остроугольные равнобедренные треугольники (то есть все углы меньше 90 градусов)
4. Разносторонний треугольники, у которых один угол не менее 90 градусов
5. Остроугольные разносторонние треугольники (каждый из углов меньше 90 градусов, и они попарно разные)

Так как, разбиение на группы, мы сделали так, что, любой произвольный треугольник, обязательно будет принадлежать ровно одной группе из перечисленных, то если мы для каждой группы по отдельности, определим и покажем к какому классу принадлежат треугольники, входящие в этой конкретной группе, то этим мы определим класс всех треугольников.

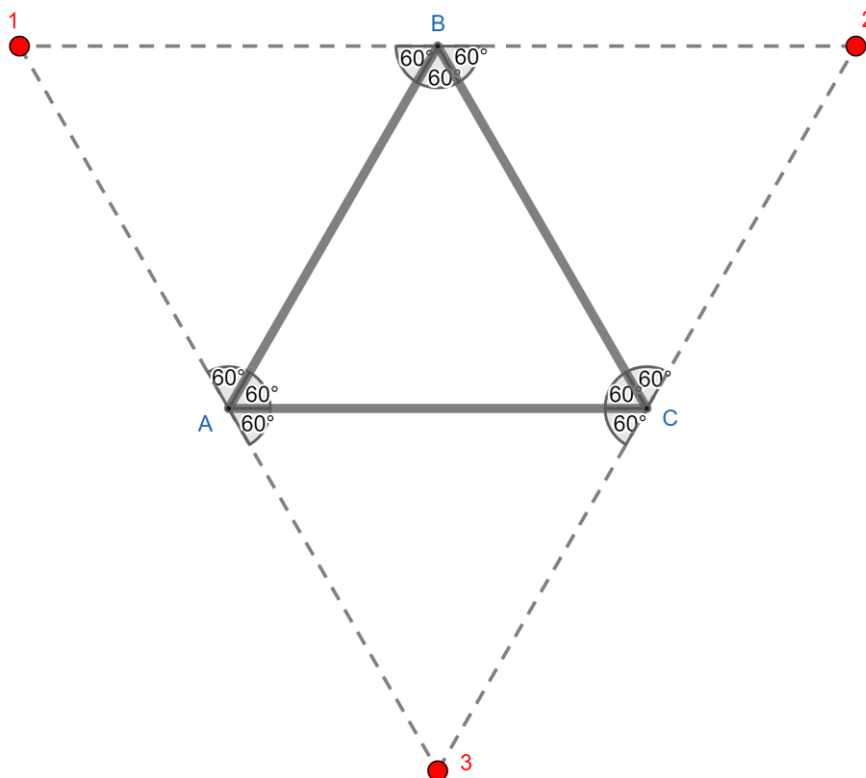
- 1) Если треугольник ABC равносторонний, и треугольник ACT подобен ему, это означает что треугольники ABC и ACT равны, так как обе равносторонние и у них общая сторона

АС. А значит в этом случае существует одна единственная точка Т на плоскости, такой чтоб треугольники ABC и АСТ были подобными.

Отсюда следует, что для равносторонних треугольников, для каждой стороны по отдельности существует ровно по одной точке, которые удовлетворяют условия.

А значит, равносторонний треугольник относится к классу $k=3$

Правильный треугольник относится к классу: $k=3$

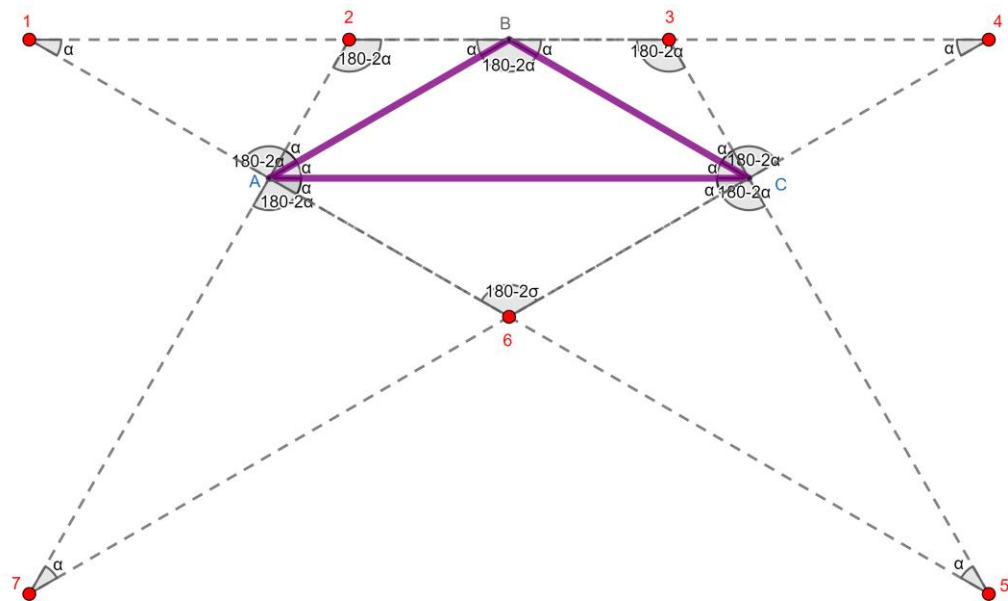


- 2) Равнобедренные треугольники, у которых один угол не менее $\pi/2$, относятся к классу $k=7$

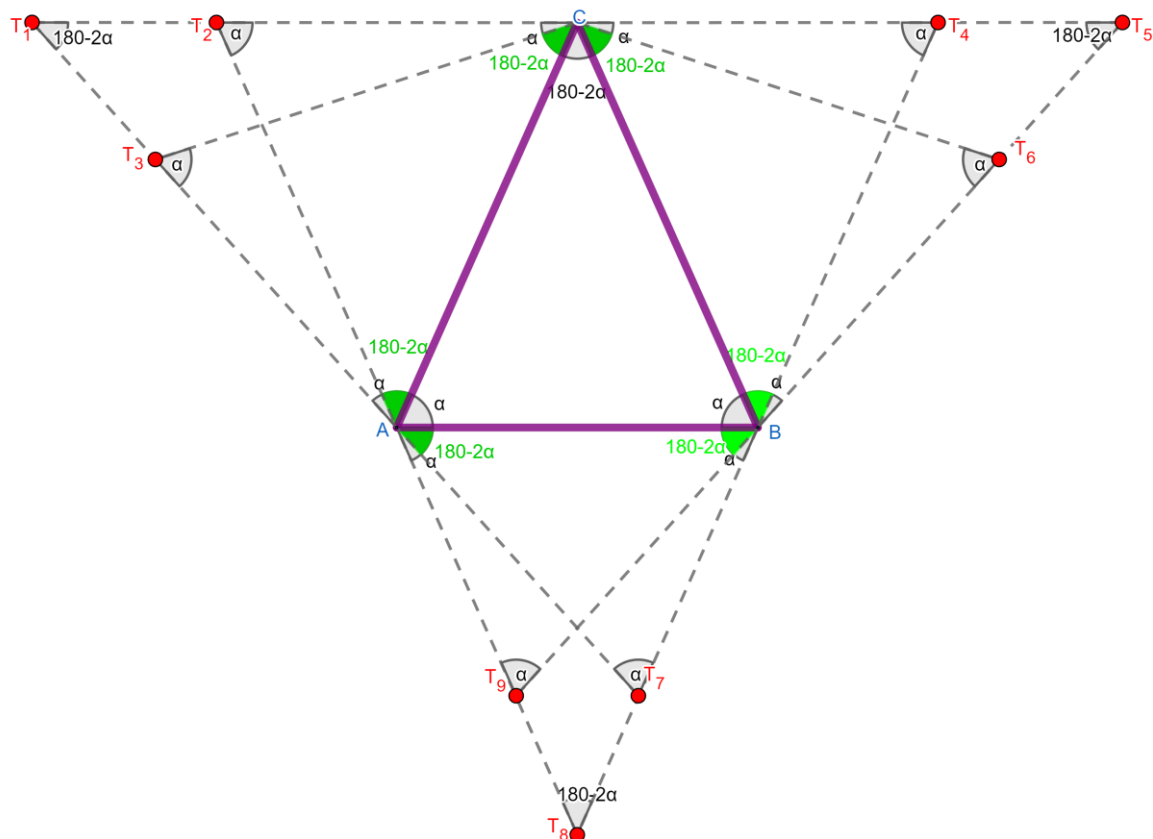
Если треугольник ABC равнобедренный, и угол у вершины «В», не менее 90 градусов, то для основания AC существуют три точки, так как если $\angle TAC = \alpha$ то $\angle TCA$ может принимать две разные значения α и $(180-2\alpha)$, а если $\angle TAC = (180-2\alpha)$ то $\angle TCA$ может принимать одно значение α , а всего для основания AC получается три разных случаев. А для АВ и ВС существуют по 2 точки, так как в треугольнике АВТ угол ТВА может равняться только α а угол ТАВ может принимать две значения α и $(180-2\alpha)$, и так как $\alpha \neq (180-2\alpha)$ эти две «точки» Т не совпадают, а значит для АВ их два, и также для ВС тоже два. а всего для такого треугольника существует $(3+2+2)=7$ точек удовлетворяющие условие

Получаем что, если треугольник равнобедренный, у которого угол у вершины $\geq \pi/2$, такой треугольник принадлежит классу $k=7$

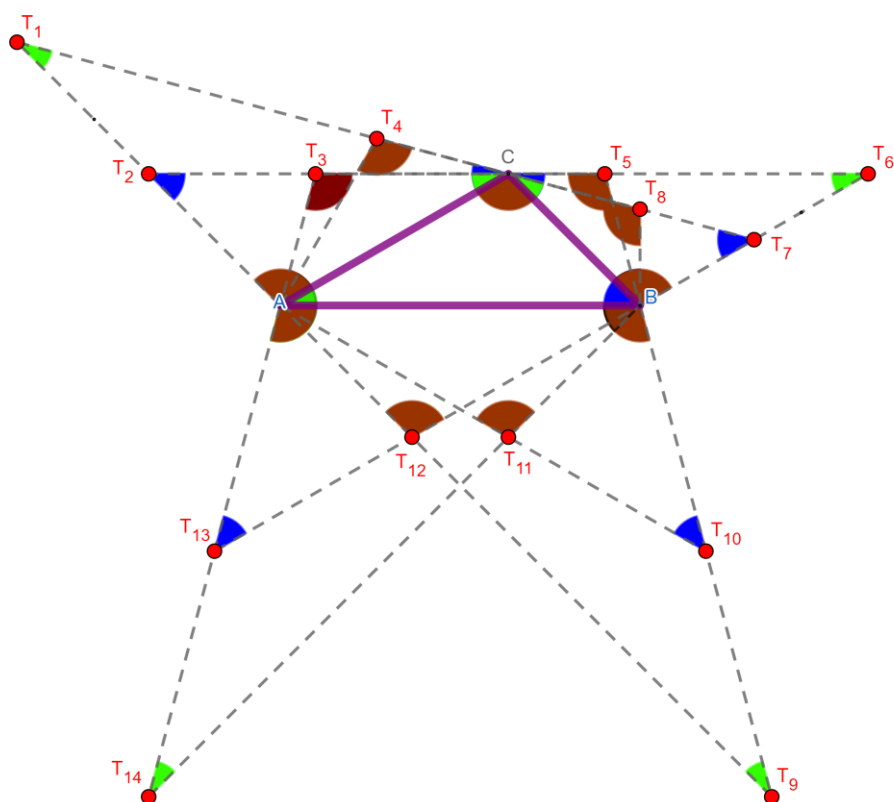
Треугольники второй группы, относятся к классу $k=7$



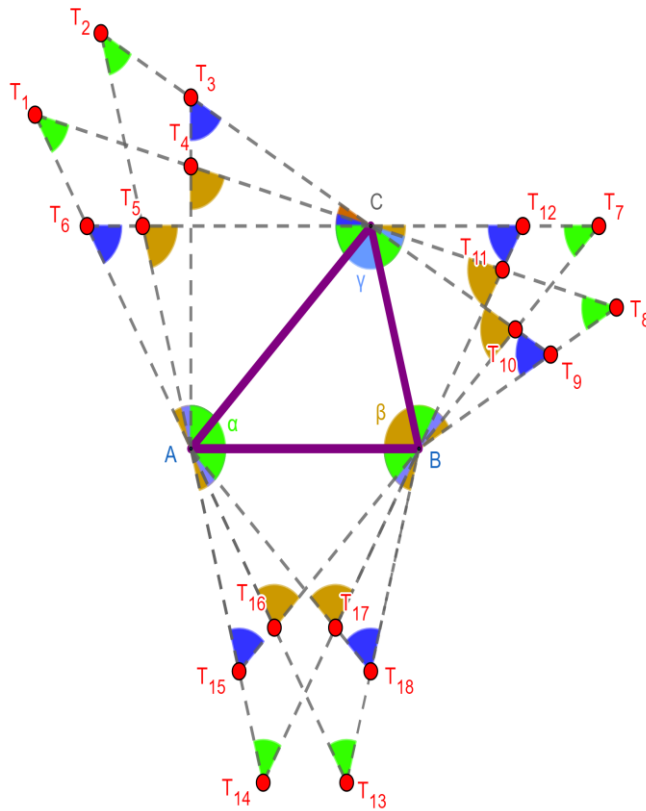
- 3) Равнобедренные остроугольные треугольники относятся к классу: $k=9$
 В этом случае, для каждой стороны получается, как для AC в предыдущем случае, поэтому каждая сторона по отдельности является диагональю ровно для трёх выпуклых четырёхугольников, удовлетворяющих условию. А в сумме получается, что, равнобедренный остроугольный треугольник принадлежит классу $k=9$



- 4) Разносторонние треугольники, у которых один угол $\geq \pi/2$, относятся к классу: $k=14$
 Сторона у которого обе прилегающие углы по отдельности $< \pi/2$ имеет 6 точек, так как угол TAB может принимать три разные значения, а угол TBA может принимать оставшейся два значения для каждого угла TAB по отдельности, и получается, что AB является диагональю $3 \cdot 2 = 6$ выпуклых четырёхугольников.
 А две остальные стороны по 4, так как угол TCA может принимать две значения (не может принимать значение угла ACB), а угол TAC может принимать по два оставшейся значения для каждого значения угла TCA по отдельности, и получается, что AC является диагональю $2 \cdot 2 = 4$ выпуклых четырёхугольников (аналогично и для BC).
 Всего получается что, треугольник ABC относится к классу: $k=(6+4+4)=14$



- 5) Разносторонние остроугольные треугольники относятся к классу: $k=18$.
 В этом случае, для каждой стороны получается, как для AB в предыдущем случае, поэтому каждая сторона по отдельности является диагональю ровно для шести выпуклых четырёхугольников, удовлетворяющих условию. А в сумме получается, что, разносторонний остроугольный треугольник относится к классу $k=(6+6+6)=18$



Ответ: Множество треугольников, по классу делятся на 5 групп

1. Равносторонние
Относятся к классу $k=3$
2. Равнобедренные, у которых один угол не менее $\pi/2$. (то есть, две углы равны, а третий не менее $\pi/2$)
Относятся к классу $k=7$
3. Остроугольные равнобедренные треугольники (то есть, две углы равны, третий отличается от них и меньше $\pi/2$)
Относятся к классу $k=9$
4. Разносторонние треугольники, у которых один из трёх углов не менее $\pi/2$ (то есть, все три угла попарно разные, но один из них не менее $\pi/2$)
Относятся к классу $k=14$
5. Остроугольные разносторонние треугольники (каждый из углов меньше $\pi/2$, и они попарно разные)
Относятся к классу $k=18$