Marathon 28

Овчинников Д.А.

January 2022

Вспомогательная задача. Пусть A - некоторое натуральное число, x, y - какиме-то его натуральные делители, причем $xy \leq A$. Найти максимум их суммы.

Решение вспомогательной задачи. Обозначим $B = xy$. Тогда $x + y = x + \frac{B}{x} = h(x)$. Производные $h'(x) = 1 - \frac{B}{x^2}, h''(x) = \frac{2B}{x^3} > 0$. Следовательно, $x = \sqrt{B}$ - точка минимума функции, и максимум достигается на краях интервала: $x \geq 1, y \geq 1 \Longrightarrow x \leq B$, и равно $1 + B \leq 1 + A$. Это и есть максимум суммы делителей A, достигаемый при $x = 1, y = A$ (либо наоборот).

Для начала решения основной задачи определим значения функций g, f при некоторых аргументах. Числа 3 и 4 раскладываются на три натуральных слагаемых единственным образом: $3 = 1 + 1 + 1, 4 = 1 + 1 + 2$, откуда $g(3) = g(4) = 1 + 1 + 1 = 3, f(3) = 1, f(4) = 0.75$. Число 5 можно разложить двумя способами: $5 = 1+1+3 = 1+2+2$, максимальную сумму трех попарных НОД дает второй: $g(5) = 1 + 1 + 2 = 4, f(5) = 0.8$. Продолжая ряд, а именно перебором по различным разложениям каждого их чисел, получим $f(6) = 1, f(7) = \frac{5}{7}, f(8) = 0.75, f(9) = 1, f(10) = 0.8, f(11) = \frac{7}{11}, f(12) = 1$. Таким образом, $F(3) = 8.1 + \frac{27}{77} \approx 8.45$.

Рассмотрим теперь произвольное число n, и его некоторое разложение на три слагаемых $n = a+b+c$. Будем рассматривать только такие разложения, чтобы выполнялось неравенство $a \leq b \leq c$, назовем их *разрешенными*. При этом, как нетрудно понять (и доказать от противного), что всегда выполняется $a \leq \frac{n}{3} \leq c, b < \frac{n}{2}$. Для простоты записи введем функции:

$\varphi(n|a, b)$ - сумму попарных НОД при разрешенных значениях a, b;

$\chi(n|a) = \max\limits_{b} \varphi(n|a, b)$ - наибольшее из значений функции φ при данном a, если b пробегает все разрешенные значения.

Тогда, $g(n) = \max\limits_{a} \chi(n|a)$.

Поскольку НОД двух натуральных чисел, во всяком случае, не больше меньшего из них, то $\varphi(n|a, b) \leq a + a + b = n - (c - a) \leq n$. Это, очевидно, верно для любого разложения на слагаемые, поэтому $g(n) \leq n, f(n) \leq 1$. Равенство достигается тогда и только тогда, когда $a = c$, откуда так же $b = a$, то есть $n = 3a$. Таким образом, можно заключить, что при любом натуральном k верно $f(3k) = 1$, тогда как $f(3k \pm 1) < 1$, что было продемонстрировано для $n \leq 12$. Это также, во всяком случае, означает, что $F(n) < 10$.

Рассмотрим случай простого $n > 2$. Тогда гарантированно можем считать $a \perp n, b + c = n - a > 2a$. Пусть НОД b и c равен d, в силу простоты n $d \perp n$, тогда и $d \perp a$. Обозначим $\xi = gcd(a, b), \eta = gcd(a, c)$. Понятно, что $\xi \perp \eta$ - в противном случае их общий множитель был бы общим множителем всех чисел a, b, c, а следовательно, n. По той же причине $\xi \perp d, \eta \perp d$. Тогда мы можем записать: $a = a'\xi\eta, b = b'd\xi, c = c'd\eta$, числа a', b', c' попарно взаимно просты. В этом случае

$$\varphi(n|a,b) = \xi + \eta + d,$$

$$b + c = n - a = b'd\xi + c'd\eta \geq d(\xi + \eta),$$

следовательно

$$d \leq \frac{n-a}{\xi+\eta},$$

$$\varphi(n|a,b) \leq \xi + \eta + \frac{n-a}{\xi+\eta}.$$

Как видно, правая часть имеет тот же вид, что и функция, рассмотренная во вспомогательной задаче, поэтому она максимальна на краях области значений $\xi + \eta$. Поскольку ξ, η - два взаимно простых делителя a, то их сумма, опять же согласно вспомогательной задаче:

$$2 \leq \xi + \eta \leq 1 + a \leq 2a \leq n - a.$$

Так что

$$\varphi(n|a,b) \leq \max\left(2 + \frac{n-a}{2}, a + 1 + \frac{n-a}{a+1}\right).$$

Выражение справа зависит лишь от n и a, поэтому (проведем попутно элементарные преобразования):

$$\chi(n|a) \leq \max\left(\frac{n+4-a}{2}, a + \frac{n+1}{a+1}\right),$$

но тогда

$$g(n) \leq \max_{1 \leq a \leq \frac{n}{3}}\left(\frac{n+4-a}{2}, a + 1 + \frac{n+1}{a+1} - 1\right).$$

Максимальное значение первого выражения в скобках достигается, очевидно, при минимальном значении $a = 1$, и равно $\frac{n+3}{2}$, а второе подобно тому, что появлялось при решении вспомогательной задачи, тогда его максимальное значение достигается тоже на краях, то есть либо при минимальном $a = 1$, либо при максимальном $a = \frac{n}{3}$. Сами краевые значения равны, соответственно, $\frac{n+3}{2}$ и $\frac{n}{3} + 3\frac{n+1}{n+3} < \frac{n}{3} + 3$. Последнее неравенство строгое, а получаемое число - дробное (кроме случая $n = 3$, но он уже разобран) поэтому мы можем округлить правую часть вниз и сделать его нестрогим, при этом справедливость максимизации сохранится.

Таким образом,

$$g(n) \leq \max\left(\frac{n+3}{2}, \lfloor\frac{n}{3}\rfloor + 3\right).$$

Видно, что при $n = 5$ оба выражения равны 4, при 7, соответственно, 5, а при больших - первое растет быстрее, мы можем от второго просто избавиться и просто записать: $g(n) \leq \frac{n+3}{2}$.

Поскольку мы рассматриваем простое $n > 2$, то оно нечетно, и всегда представимо в виде $n = 1 + k + k$, откуда $\varphi(n|1,k) = k + 2 = \frac{n-1}{2} + 2 = \frac{n+3}{2}$. Следовательно, это значение верхней оценки всегда достигается, поэтому для простого n

$$g(n) = \frac{n+3}{2}$$

$$f(n) = \frac{n+3}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2n}$$

Сверяясь с вычисленными явно в начале решения $g(n), f(n)$, убеждаемся в справедливости формулы.

Выпишем снова явные значения в следующем порядке, добавив случай $n = 4$:

$$f(3) = 1, f(5) = \frac{4}{5}, f(4) = \frac{3}{4}, f(7) = \frac{5}{7}, f(11) = \frac{7}{11}.$$

Видно, что в ростом n эти значения асимптотически стремятся к $\frac{1}{2}$ сверху.

Теперь выскажем следующее Утверждение.

Утверждение. Для любого $n \geq 3$ выполняется $f(n) = f(\nu)$, где ν - делитель n, первым встречающийся в последовательности $\{3, 5, 4, 7, 11, ...\}$ (все следующие члены совпадают с членами последовательности простых чисел; соответствующий ряд значений функции f строго убывает).

Доказательство. Будем доказывать методом индукции. Для $n \in [3, 12]$ значения $f(n)$ были вычислены явно, по ним видно, что Утверждение верно. Пусть оно верно для всех $3 \leq n < N$, докажем его для $n = N$. Если N простое, то $\nu = N$, и Утверждение выполняется. В противном случае имеем две возможности при разложении n на три слагаемых: их НОД (являющийся так же делителем N) может быть отличен от единицы - обозначим его m, а может быть равен 1.

НОД=1. Ввиду того, что мы рассматриваем только часть разложений на три слагаемых, будем помечать наши функции индексом 1 слева вверху. Как и в случае простоты n, мы можем записать $d = gcd(b, c)$, при этом $a \perp d$, и точно также для других пар, таким образом, $N = a'\xi\eta + b'd\xi + c'd\eta$; и, поскольку рассуждения сохранятся,

$${}^1\varphi(N|a, b) = \xi + \eta + d \leq \xi + \eta + \frac{N - a}{\xi + \eta}$$

Дальнейшие выкладки повторяют выкладки для простого аргумента, таким образом, в этом случае так же имеет место неравенство

$${}^1g(N) \leq \frac{N + 3}{2},$$

$${}^1f(N) \leq \frac{1}{2} + \frac{3}{2N}.$$

Для нечетного N, аналогично случаю простого n, неравенство превратится в равенство.

НОД>1. Зафиксируем m (будем, как и в предыдущем случае, отмечать это слева вверху от обозначения функции; полагаем, что все возможные m перебираются в порядке возрастания) и запишем сумму в виде $N = ma + mb + mc$, обозначим $s = a + b + c = \frac{N}{m}$. Считаем, что a, b, c варьируются в допустимых пределах: $1 \leq a \leq b \leq c$ (тогда $s \geq 3$) и их общий НОД равен 1. Тогда

$${}^m\varphi(N|ma, mb) = gcd(ma, mb) + gcd(ma, mc) + gcd(mb, mc) =$$

$$= m\left(gcd(a, b) + gcd(a, c) + gcd(b, c)\right) =$$

$$= m \cdot^1 \varphi\left(s|a, b\right) \leq m \cdot^1 g\left(s\right)$$

Последнее неравенство записано по определению функции g. Следовательно, поскольку ${}^mg(N)$ является одним из значений ${}^m\varphi(N|ma, mb)$, то

$${}^mg(N) \leq m \cdot^1 g\left(s\right),$$

следовательно,

$${}^mf(N) \leq^1 f(s).$$

Поскольку мы перебираем все возможные значения m, и для каждого из них - все возможные взаимно-простые тройки $\{a, b, c\}$, то мы переберем и все возможные разложения N на сумму трех слагаемых. Тогда

$$f(N) \leq \max_m{}^m f(s) \equiv \max_s f(s)$$

Если выбрать s (по определению, делитель N), появляющийся в последовательности $\{3, 5, 4, 7, ...\}$, - в формулировке Утверждения его значение обозначено ν - то $f(\nu)$ достигается следующим образом. Если $\nu = 4$, $N = m+m+2m$; если ν нечетно и равно $2k+1$, $N = m+km+km$. Тогда $\varphi(4m|m, m) = 3m, f(4m) = 0.75 = f(4)$; $\varphi(\nu m|m, km) = 2m + km, f(\nu m) = \frac{\nu+3}{2\nu} = f(\nu)$.

Таким образом, Утверждение доказано. Перейдем к вопросам задачи.

Наибольшее значение $F(n)$. Заметим, что среди 10 идущих подряд чисел три или четыре кратны 3, два числа - кратны 5, и два либо три числа - кратны 4. В последнем случае одно из чисел обязательно кратно так же и 3, поэтому оно будет учтено в первом поднаборе. Наберем максимально возможные $f(n+i)$. Если $3|n$, четыре числа кратны трем, $f(n) = f(n+3) = f(n+6) = f(n+9) = 1$. Еще не более двух чисел кратны пяти: $f(n_1) = f(n_1+5) = 0.8$; и два числа - кратны четырем: $f(n_2) = f(n_2+4) = 0.75$ (если число n_2+4 кратно трем, то на его месте будет стоять n_2+8). Итак, максимально достижимая сумма $f(n+i)$ для восьми чисел из 10 - когда все они различны - не превышает $4 \cdot 1 + 2 \cdot 0.8 + 2 \cdot 0.75 = 7.1$. Еще два числа не кратны ни 3, ни 4, ни 5, а значит, для них верно $f(n') \leq f(7) = \frac{5}{7}$. Если возможно подобрать такое n, что останутся два числа с разностью 7, то $F(n) \leq 7.1 + 2 \cdot \frac{5}{7} = 8.1 + \frac{3}{7} \approx 8.53$. Если же мы выясним, что это невозможно, то самый выгодный случай - когда одно из них кратно 7, а другое - 11, так что $F(n) \leq 7.1 + f(7) + f(11) = 7.1 + \frac{5}{7} + \frac{7}{11} = F(3) = \frac{6507}{770} \approx 8.45$.

Чтобы такой случай состоялся, требуется, чтобы на 7 разделилась одна из пар $\{n, n+7\}$, $\{n+1, n+8\}$, $\{n+2, n+9\}$. Но мы уже выбрали, чтобы n и $n+9$ были кратны 3. Следовательно, на 7 делятся $n+1$ и $n+8$. Аналогичным образом заключаем, что на 5 должны делиться числа $n+2$ и $n+7$. Но оставшиеся два числа $n+4$ и $n+5$ не могут делиться на 4 одновременно. Следовательно, такой случай невоспроизводим, в отличие от другого: максимальное значение $F(n)$ осуществляется, например, при $n = 3$. Вообще, при числах $n = 4620k + 3, n = 4620k + 468, n = 4620k - 12n = 4620k - 377$.

Значения меньше 7.1 Поступим наоборот - минимизируем вхождение в десятку чисел, кратных 3, 4, 5, а также сравнительно небольшим простым. Тогда следует выбрать $n = 3k \pm 1$, мы получим наименьшее возможное количество чисел кратных 3 (то есть, три). Так как в десятку обязательно войдет два кратных 4 или 5, и не более одного из каждой пары кратны трем, то подберем n так, чтобы ровно одно число делилось на 4 (5), но не на три, и ровно одно на 12 (15) и все это четыре различных числа. Таким образом, у в десятке будет пять чисел с уже гарантированными $f(n+i)$, их сумма $3 \cdot f(3) + f(4) + f(5) = 4.55$.

Другие пять чисел дадут $f(n') = \frac{1}{2} + \frac{3}{2\nu}$, каждое из nu не меньше 7, откуда следует оценка снизу для $F(n)$:

$$F(n) \geq 4.55 + \frac{5}{2} + \frac{3}{2}\sum\frac{1}{\nu} \geq 7.05$$

Видно, что если мы сможем подобрать такое n, что у пяти обозначенных числе будет как можно большие ν, то $F(n)$ будет ненамного превышать 7.05, так что может быть меньше 7.1, если $\sum \frac{1}{\nu} < \frac{1}{30}$.

Если это числа простые или удвоенные простые, и достаточно велики, можно ожидать, что это выполнится.

Попробуем сконструировать n. Пусть кратны 3 числа $n+1, n+4, n+7$. Заметим, что, так как мы выбрали, что кратны 4 могут быть только два числа, то это не могут быть $n, n+4, n+8; n+1, n+5, n+9$. Но тогда, так как мы должны из первой тройки выбрать одно, кратное 4, это может быть только $n+7$, и, соответственно, $n+3$. Значит, $n = 12m-7$. Кратны пяти могут быть, в таком случае, пары $n+1, n+6$ либо $n+2, n+7$. В первом случае мы получаем, что n должно иметь вид $n = 60k+29$, во втором - $60k-7$.

Другой вариант - кратны 3 $n+2, n+5, n+8$. Тогда среди них кратно 4 будет $n+2$, а следовательно, $n+6$. Ясно, что $n = 12m-2$. Кратные 5 пары, соответственно, $n, n+5$ и $n+3, n+8$, тогда $n = 60k+10$ либо $n = 60k+22$.

Имеестся еще одна возможность для уменьшения $F(n)$ - число, кратное 5 и 4 одновременно тоже исключает большие значения. Выпишем n для таких случаев (без полного вывода): $n = 60k-2, n = 60k+11, n = 60k+13, n = 60k+14, n = 60k+37, n = 60k+38, n = 60k+40$.

Перебрав эти возможности для нескольких k, можно выяснить, что при уже при $k=3$ находятся подходящие числа: $F(190) = F(191) = 7.09624 < 7.1$.

Ответ. Наибольшее значение $F(n)$ равно $\frac{6507}{770} \approx 8.45$.

Да. В частности, $F(190) < 7.1$.