

ММ278

Правильные в правильных

Назовем сечение выпуклого многогранника диагональным, если каждая сторона многоугольника сечения является диагональю грани.

Какие многоугольники могут быть диагональными сечениями правильных многогранников?

Всего существует пять правильных многогранников: правильный тетраэдр, куб, правильный октаэдр, правильный додекаэдр и правильный икосаэдр

Но, в тетраэдре, в октаэдре и в икосаэдре все грани треугольники, а треугольник не имеет диагональ

Поэтому «диагональные» сечения возможны только в кубе и в додекаэдре.

В кубе «диагональных» сечении 8, и каждый из них является правильным треугольником со стороной: $a\sqrt{2}$, где «а» является величиной ребра данного куба.

А в правильном додекаэдре «диагональных» сечении 62:

1. 20 одинаковых правильных треугольников (количество треугольников, совпадает с количеством вершин додекаэдра).
2. 30 одинаковых квадратов (количество квадратов, совпадает с количеством ребер додекаэдра)
3. 12 одинаковых правильных пятиугольников. (Среди «диагональных» сечении, количество правильных пятиугольников, совпадает с количеством граней додекаэдра).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

В доказательствах, по умолчанию будем опираться на две следующие утверждения:

1. Так как, каждая сторона многоугольника сечения, является диагональю грани → вершинами «диагональных» сечения являются вершины многогранника. А сторонами - диагонали граней многогранника.
2. Любая пара диагоналей, исходящие от одной вершины, однозначно определяет плоскость содержащей эту пару диагоналей.

КУБ

Каждая вершина куба, является вершиной ровно трёх граней, и с каждой вершины можно провести ровно три диагонали, по одной для каждой грани данной вершины.

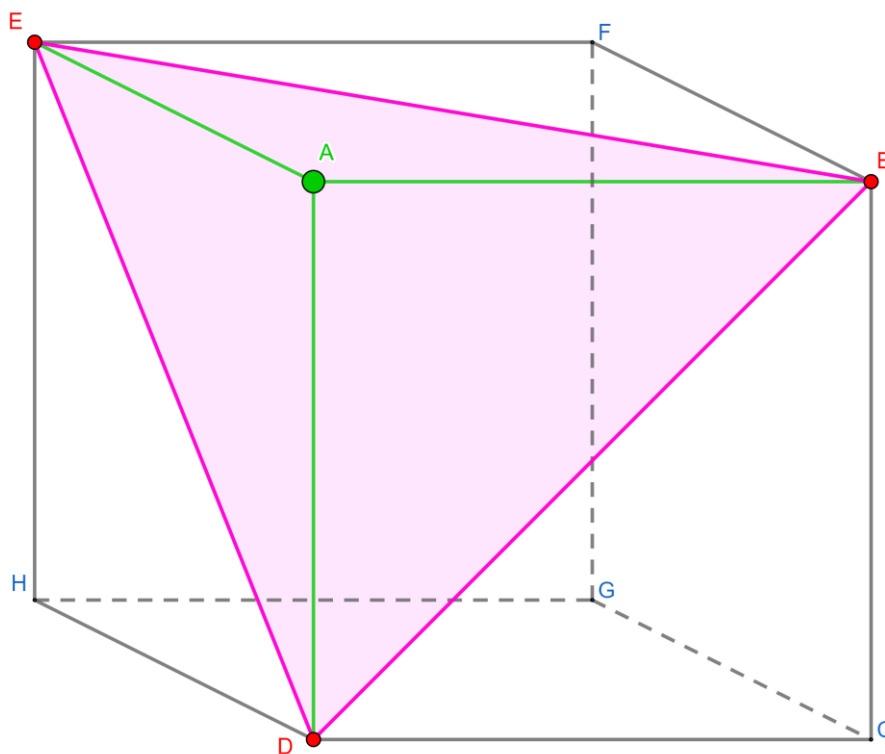
И значит для каждой вершины существует три пары диагоналей, и каждый из них даёт правильный треугольник, со стороной: $a\sqrt{2}$, где «а» является величиной ребра данного куба.

А так как, количество вершин в треугольнике 3, получается, что количество таких сечении, в кубе $3 \cdot 8 / 3 = 8$

По-другому говоря, каждое такое сечение, «усекает» от куба равнобедренный тетраэдр, боковыми рёбрами которого являются три рёбра куба, исходящие от одной вершины куба, а упомянутым сечением является основание этого тетраэдра, который и является правильным треугольником, со стороной: $a\sqrt{2}$.

И для каждой вершины существует ровно один такой тетраэдр, в котором он является вершиной соединения боковых рёбер такого тетраэдра.

И получаем что, количество таких сечении в кубе, равно количеству его вершин, а значит их ровно 8 штук.



ПРАВИЛЬНЫЙ ДОДЕКАЭДР

В додекаэдре, берём произвольную вершину, и берём любую пару грани, из тех трёх граней, вершиной которых он является.

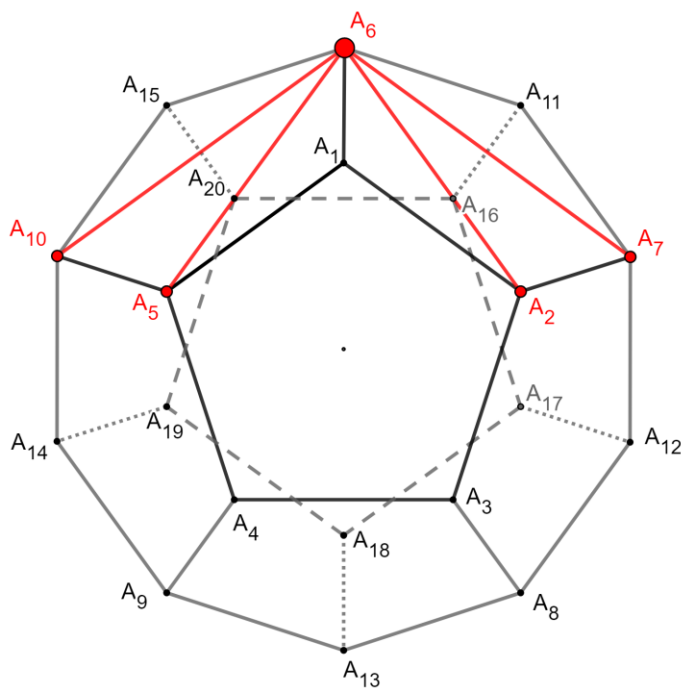
И рассматриваем все четыре варианта пар диагоналей, где каждая пара исходит от данной вершины, и в каждой паре диагоналей, один является диагональю одной грани, а второй диагональю другой грани из выбранной нами пары граней.

На рисунке внизу, показан правильный додекаэдр, где упомянутой вершиной взята вершина A_6

А гранями взяты $A_6A_1A_5A_{10}A_{15}$ и $A_6A_1A_2A_7A_{11}$

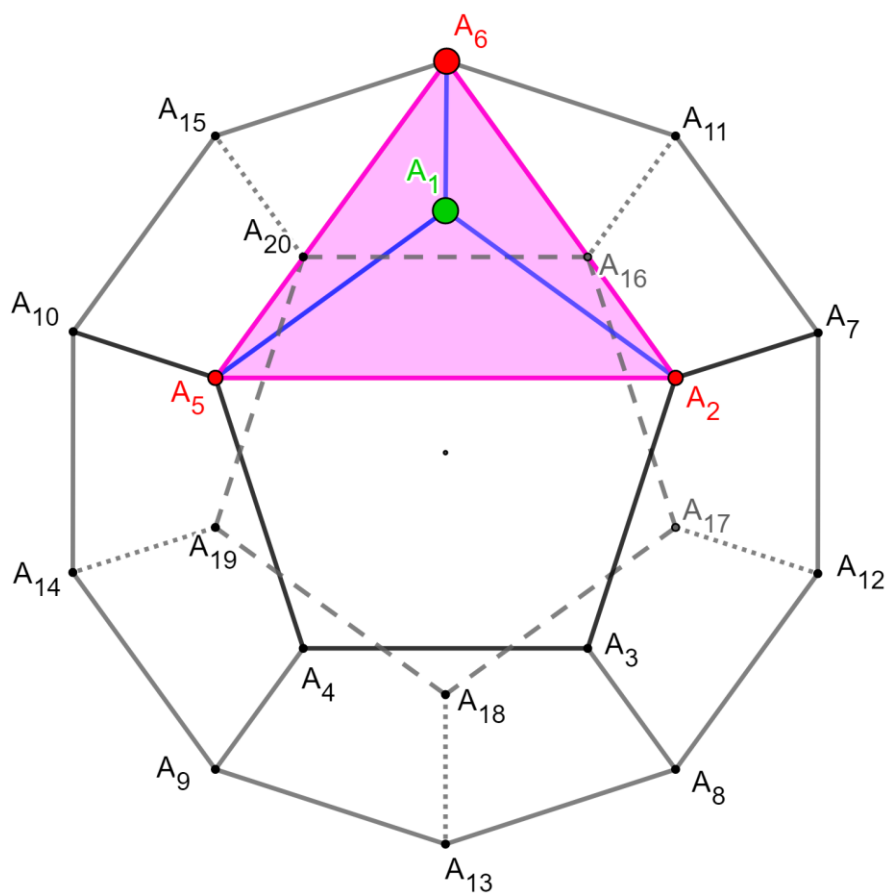
И пары диагоналей, которых мы должны рассмотреть, образуют:

- 1) $A_5A_6A_2$
- 2) $A_{10}A_6A_2$
- 3) $A_5A_6A_7$
- 4) $A_{10}A_6A_7$



И если мы рассмотрим сечения для каждого из них, таким образом мы определим все типы «диагональных» сечения для правильного додекаэдра.

1) $A_5A_6A_2$

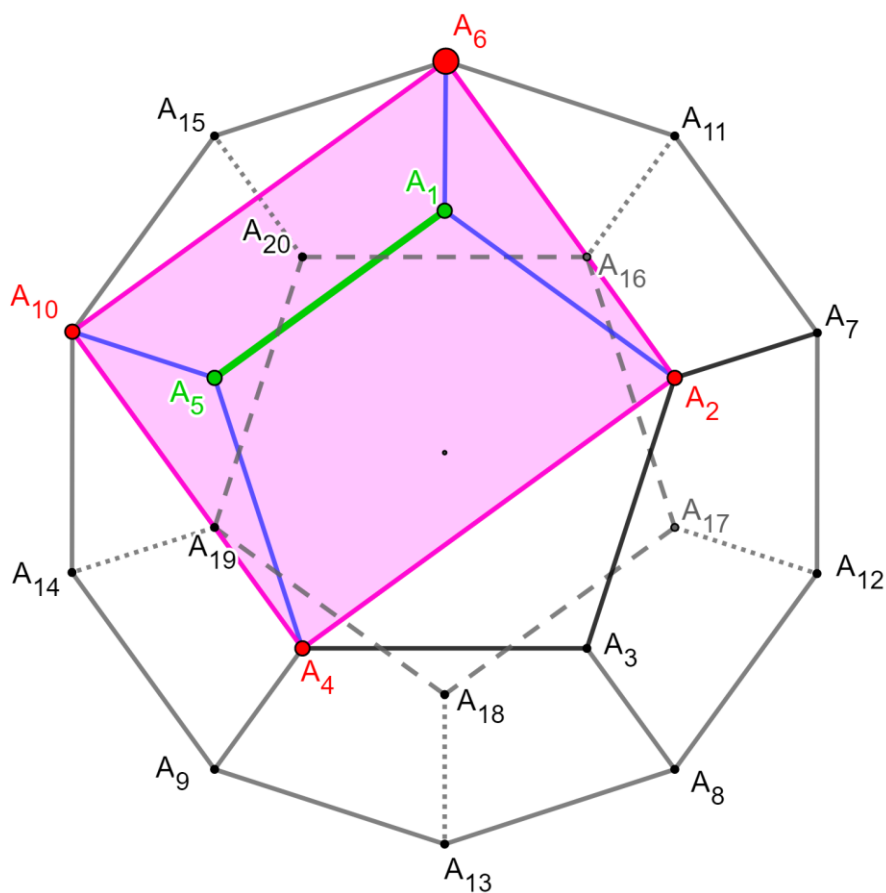


Сечение $A_5A_6A_2$ является правильным треугольником, и оно является основанием равнобедренного тетраэдра с вершиной A_1

И для каждой вершины существует ровно один такой тетраэдр.

Отсюда следует что, среди «диагональных» сечении правильного додекаэдра, количество правильных треугольников совпадает с количеством вершин додекаэдра, и значит их 20

2) $A_{10}A_6A_2$ и $A_5A_6A_7$



$(A_6A_{10}) \parallel (A_1A_5) \parallel (A_2A_4) \rightarrow (A_6A_{10}) \parallel (A_2A_4) \rightarrow (A_2A_4) \in (\text{в сечении содержащей } A_{10}A_6A_2) \rightarrow \text{Сечением содержащим } A_{10}A_6A_2 \text{ является четырёхугольник } A_{10}A_6A_2A_4$

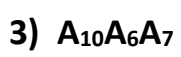
И из-за того, что, правильный многогранник обладает пространственной симметрией $\rightarrow$ прямая проходящая в точках середин отрезков (A_2A_4) и (A_6A_{10}) является осью симметрии четырёхугольника $A_{10}A_6A_2A_4$, и так как, все стороны четырёхугольника $A_6A_2A_4A_{10}$ равны, и прямая проходящая в серединах его двух параллельных сторон является его осью симметрии, отсюда следует что, четырёхугольник $A_6A_2A_4A_{10}$ является квадратом.

Такая же ситуация в случае «диагонального» сечения содержащего $A_5A_6A_7$.

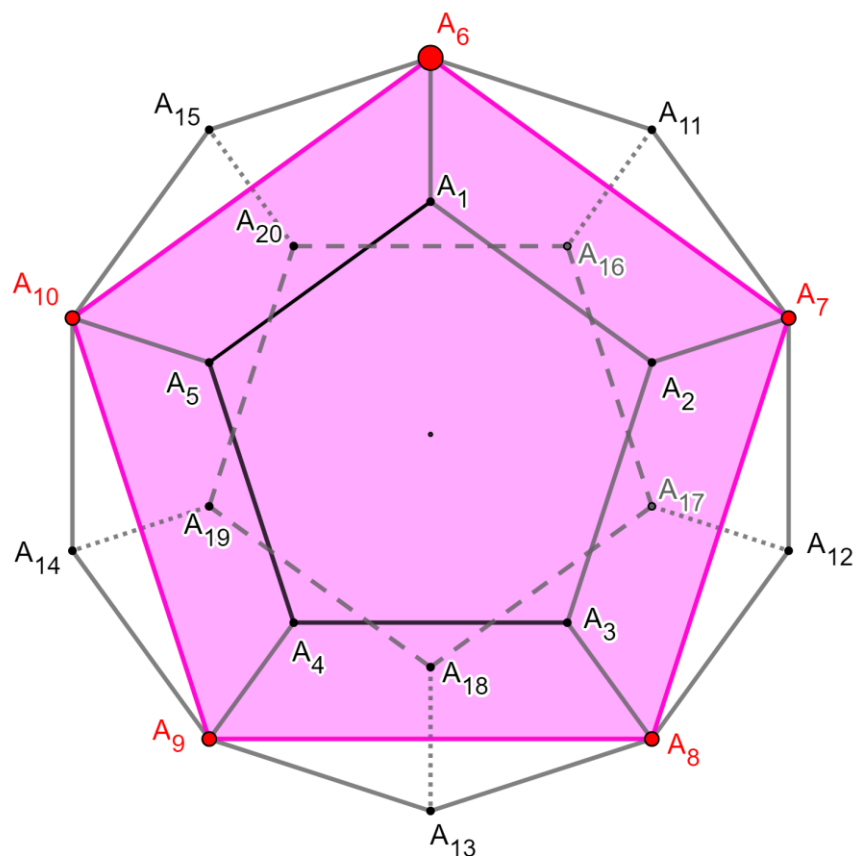
Сечение, содержащее $A_5A_6A_7$ даёт квадрат $A_3A_5A_6A_7$, и параллельно ребру додекаэдра A_1A_2

И для каждого ребра додекаэдра, существует ровно одно такое «диагональное» сечения, которому он параллелен, и «соединён» ребром с каждой его вершин.

Отсюда следует что, количество квадратов среди «диагональных» сечении в правильном додекаэдре, совпадает с количеством рёбер в додекаэдре, а значит всего их 30.



3) $A_{10}A_6A_7$



Как показано на рисунке сверху, плоскость содержащая $A_{10}A_6A_7$ параллельно граням $A_1A_2A_3A_4A_5$ и $A_{16}A_{17}A_{18}A_{19}A_{20}$, и такое сечение даёт правильный пятиугольник $A_6A_7A_8A_9A_{10}$.

И как показано на рисунке снизу, есть ещё второе пятиугольное сечение которое параллельно граням $A_1A_2A_3A_4A_5$ и $A_{16}A_{17}A_{18}A_{19}A_{20}$, а именно $A_{11}A_{12}A_{13}A_{14}A_{15}$

И для каждой пары параллельных грань правильного додекаэдра, существует ровно две таких пятиугольных «диагональных» сечения которые параллельны им, а значит пятиугольных «диагональных» сечения 12 (количество грань додекаэдра)

