Конкурсная задача ММ49 (3 балла)

Для каждого натурального числа a, через $m(a)$ обозначим мощность множества $\{НОД(x^{12}, x + a) \mid x \in N\}$.

Решить в натуральных числах уравнение: $m(a) = a$

Пусть $y = x + a$, тогда $НОД(x^{12}, x + a) = НОД((y - a)^{12}, y) = НОД(a^{12}, y)$.

$\{НОД(a^{12}, y), y \in N, y > a\}$ равен количеству делителей числа a^{12}.

Пусть $a = \prod_{i=1}^{n} p_i^{d_i}$ - разложение а на степени простых,

тогда количество делителей числа a^{12} $m(a) = \prod_{i=1}^{n}(12d_1 + 1)$.

Надо решить уравнение $m(a) = $ a.

Так как $m(a) \equiv 1 \ (mod\ 12)$, то ни $m(a)$, ни а не делятся ни на 2, ни на 3.

Пусть $b_i = p_i^{d_i}/(12d_i + 1)$, тогда $1 = {}^{a}/_{m(a)} = \prod_{i=1}^{n} b_i$. Только при p из $\{5, 7, 11\}$ сомножители могут быть меньше единицы. При этом их произведение равно ${}^{5 \cdot 7 \cdot 11}/_{13^3} > {}^{1}/_{6}$. Так что все остальные b_i должны быть меньше 6, то есть:

1. Если $d_i = 1$, то $p_i < 6 \cdot 13 = 78$.
2. Если $d_i = 2$, то $p_i < \sqrt{6 \cdot 25} < 13$.
3. Если $d_i = 3$, то $p_i < \sqrt[3]{6 \cdot 37} < 7$.
4. Если $d_i = 4$, то $p_i < \sqrt[4]{6 \cdot 49} < 5$.

Таким образом, d_i не превышают 3, а значит $m(a)$ может содержать множители только 13, 5 и 37, причём 13 и 37 - только по одному разу, а 5 - не более 3 раз (но чётное число раз). Следовательно, множитель 5 может содержаться 0 или 2 раза, значит 37 тоже исключается. 13 может содержаться 0 или 1 раз.

Из 5^2 и 13 можно составить 4 произведения, и каждое из них удовлетворяет ответу.

Проверяем:

$a = 1,\ m(a) = 1.$

а $= 13,\ m(a) = 12 + 1 = 13.$

а $= 25 = 52,\ m(a) = 12 \cdot 2 + 1 = 25.$

а $= 325 = 13 \cdot 5^2,\ m(a) = (12 + 1)(12 * 2 + 1) = 325.$

Ответ: $\{1, 13, 25, 325\}$