Пусть $a = \prod_{i=1}^{n} p_i^{d_i}$ – разложение а на степени простых. $N(a) = n$ – количество простых делителей а без учёта кратности.

$S(a) = \sum_{i=1}^{n} d_i$ – количество простых делителей а с учётом кратности (сумма показателей).

$M(a) = \prod_{i=1}^{n} (d_i + 1)$ – количество всех натуральных делителей а . z – параметр задачи.

$m(a, z) = M(a^z) = \prod_{i=1}^{n} (zd_i + 1)$.

Когда z понятно из контекста, можно писать просто $m(a)$.

Нас интересуют решения в натуральных числах уравнения $m(a, z) = a$.

Легко видеть, что $m(a)$ – мультипликативная (но не вполне мультипликативная) функция, то есть $m(a \cdot b) = m(a) \cdot m(b)$, если а и b взаимно просты.

У меня нет законченного исследования, я буду просто проводить рассуждения, иллюстрируя их примерами.

Возникает очень интересный цикл:

1. Зная число a, можно найти его разложение на степени простых.

2. Зная степени простых (даже потеряв информацию об основаниях), можно (простой заменой) построить набор $zd_i + 1$.

3. Перемножив все $zd_i + 1$, можно получить $m(a)$.

4. Приравняв $a = m(a)$, перейдём к пункту 1.

При каждом из этих переходов можно применять какие-то правила, позволяющие отфильтровывать неподходящие операнды, в итоге приходя к небольшому множеству, содержащему все решения.

Пример 1. Применение отсечений в задаче $m(a, 11)$.

Так как $m(a, 11) = a$, а $m(p^d)$ может быть меньше p^d только при $p \in \{2, 3, 5, 7\}$, то $2^d/_{(11d + 1)} < 12^3/_{3 \cdot 5 \cdot 7}$, откуда $d < 11$, а сумма степеней $< 11 + 3 = 14$.

Это довольно плохая оценка, не учитывающая специфики задачи, но стартовать можно и с неё.

$(11 \cdot 0 + 1) = 1$

$(11 \cdot 1 + 1) = 12 = 2^2 \cdot 3$

$(11 \cdot 2 + 1) = 23$

$(11 \cdot 3 + 1) = 34 = 2 \cdot 17$

$(11 \cdot 4 + 1) = 45 = 3^2 \cdot 5$

$(11 \cdot 5 + 1) = 56 = 23 \cdot 7$

$(11 \cdot 6 + 1) = 67$

$(11 \cdot 7 + 1) = 78 = 2^2 \cdot 3 \cdot 13$

$(11 \cdot 8 + 1) = 89$

$(11 \cdot 9 + 1) = 100 = 2^2 \cdot 5^2$

$(11 \cdot 10 + 1) = 111 = 3 \cdot 37$

Следовательно $p \in \{2, 3, 5, 7, 13, 17, 23, 37, 67, 89\}$.

Пусть $dS(p^d) = S(m(p^d)) - d$ – увеличение суммы степеней.

Составим табличку. В заголовке матрицы – возможные основания, столбец d – возможные степени, столбец S – веса строк, столбец dS – увеличение суммы степеней, в матрице (назовём её A) - разложение $m(p^d)$ на простые.

d	2	3	23	17	5	7	67	13	89	37	S	dS
1	2	1									3	+2
2			1								1	-1
3	1			1							2	-1
4		2			1						3	-1
5	3					1					4	-1
6							1				1	-5
7	1	1						1			4	-4
8									1		1	-7
9	2				2						4	-5
10		2								1	2	-8

Решение задачи состоит в том, чтобы выбрать какие-то строки (не обязательно по одному разу), и, просуммировав их, получить строку, содержащую в качестве значений номера выбранных строк и именно в выбранном количестве.

Первая операция легко алгебраизуется (это просто умножение целочисленного вектора-строки на матрицу), а как формализовать интерпретацию ответа, я не знаю. Но суть должна быть понятна.

В поиске нужного мультимножества строк может помочь столбец dS, так как сумма dS должна оказаться равной нулю (в $m(a)$ должны входить те же множители и в тех же количествах, что и в a).

Имеется только одна строка с положительным dS, и она должна войти в решение, так как только из отрицательных dS нуля не составить.

Если взять строку 1 три раза, то потребуются три столбца с 1, а их можно получить, минимум, из трёх разных строк, так как ни в одной строке нет двух единиц в столбцах, не пересекающихся с первой строкой.
Для того чтобы сумма номеров взятых строк не превысила 13, это должны быть строки 2, 3 и 4 или 2, 3 и 5. Но сумма весов этих строк превышает 13. Значит строка 1 берётся не более двух раз. Тогда строки с $dS \leq -4$ можно исключить из таблицы.

d	2	3	23	17	5	7	S	dS
1	2	1					3	+2
2			1				1	-1
3	1			1			2	-1
4		2			1		3	-1
5	3					1	4	-1

$2 \cdot 2 - 1 - 1 - 1 - 1 = 0$,
первая строка уже даёт 2^4, если взять ещё и пятую, то степень двойки станет больше 5, значит пятая строка исключается.
Если взять третью строку, то степень двойки станет больше 4, значит третья строка исключается. Остаются вторая и четвёртая, но две первых степени из них набрать невозможно.
$2 - 1 - 1 = 0$,
обе -1 из одной строки, значит, из второй. Всё!
Ответ:
$m(1,11) = 1$.
$m(12 \cdot 23 \cdot 23,11) = m(3 \cdot 2^2 \cdot 23^2, 11) = 12 \cdot 23 \cdot 23$.
Для $z = 11$ решение оказалось довольно длинным, но вот для $z = p - 1$, где p – простое, всё обычно отсекается гораздо проще. Во-первых, $m(p, p - 1) = p - 1 + 1 = p$.
Во-вторых, в столбце с именем p больше нет ни одной единицы (следующий ненольвстретился бы только в p+1-й строке), что позволяет использовать первую строку для уравновешивания других сумм.
В-третьих, z делится, как минимум, на 2, а то и на другие простые, что сильно сокращает число строк.
Пример 2. Применение отсечений в задаче $m(a, 12)$.
Это именно та задача, которая была в конкурсе.
$12 = 2^2 \cdot 3$, то есть a не делится ни на 2, ни на 3, наименьший простой делитель - 5.

Строим табличку.

d	13	5	S	dS
1	1		1	0
2		2	2	0

Для всех последующих степеней dS отрицательны, так как уже $m(5^3) = 12 \cdot 3 + 1 = 37 < 125 = 5^3$.

А так как ни одного положительного dS нет, то степени с отрицательным dS можно не рассматривать.

Ответ:

$m(1{,}12) = 1$.

$m(13{,}12) = 13$.

$m(5^2, 12) = 25 = 5^2$.

$m(13 \cdot 5^2, 12) = 13 \cdot 25 = 13 \cdot 5^2$.

Пример 3. Применение отсечений в задаче $m(a, 990)$.

$990 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$, то есть а не делится ни на 2, ни на 3, ни на 5, наименьший простой делитель - 7.

d	991	7	283	2971	17	233	S	dS
1	1						1	0
2		1	1				2	0
3				1			1	-2
4					1	1	2	-2

Для всех последующих степеней dS отрицательны, так как уже $m(7^5) = 990 \cdot 5 + 1 = 4951 < 16807 = 7^5$.

А так как ни одного положительного dS нет, то степени с отрицательным dS можно не рассматривать.

Но вторая строка не является решением. Для того, чтобы получить решение, к ней надо прибавить удвоенную первую.

Ответ:

$m(1{,}990) = 1$.

$m(991{,}990) = 991$.

$m(7 \cdot 283 \cdot 991^2, 990) = 991 \cdot 991 \cdot 7 \cdot 283$.