Конкурсная задача ММ193 (6 баллов)

Игроки Вася, Федя и Коля сыграли несколько партий в настольный теннис навылет. Сколько партий мог сыграть Коля, если Вася сыграл a партий, а Федя — b? Участники первой партии определяются жребием; для определённости будем считать, что $b \le a$.

Ответ. Количество партий, сыгранных Колей, может быть любым целым числом c, удовлетворяющим условиям

$$\begin{cases} a+b+c \text{ — чётное,} \\ \max\left\{a-b, \dfrac{a+b-2}{3}\right\} \le c \le \min\{a+b, 3b-a+2\}. \end{cases} \qquad (1)$$

В частности, для некоторых a и b не будет существовать ни одного целого c, удовлетворяющего условиям (1), тогда эти значения a и b являются недопустимыми.

Решение. Обозначим через c количество партий, сыгранных Колей, а общее количество партий в турнире — через n. Перечислим условия, которым должны удовлетворять целые неотрицательные числа a, b, c.

1°. Поскольку в каждой партии участвуют двое, то $a+b+c=2n$, откуда следует, что $a+b+c$ должно быть чётным.

2°. Каждый из игроков не мог сыграть партий больше, чем другие два, вместе взятые (поскольку в каждой своей партии он играет с кем-то из тех двоих). Это значит, что

$a \le b+c, \qquad b \le a+c, \qquad c \le a+b.$

С учётом того что $b \le a$ и $c \ge 0$, второе неравенство можно отбросить, а оставшиеся два запишем в виде

$a-b \le c \le a+b.$

3°. Каждый игрок из любых двух подряд идущих партий должен участвовать хотя бы в одной, т.е. он не может пропустить более чем одну партию подряд. Из этого следует, что

$$a \ge \left[\frac{n}{2}\right], \qquad b \ge \left[\frac{n}{2}\right], \qquad c \ge \left[\frac{n}{2}\right].$$

Поскольку $b \le a$, то первое из этих неравенств можно отбросить. С учётом того что b, c, n — целые, оставшиеся два неравенства будут эквивалентны следующим:

$$b \ge \frac{n-1}{2}, \qquad c \ge \frac{n-1}{2}.$$

Подставим сюда $n=\frac{a+b+c}{2}$ и получим

$$\frac{a+b-2}{3} \le c \le 3b-a+2.$$

Утверждение: количество партий, сыгранных Колей, может быть любым целым числом c, удовлетворяющим условиям

$$\begin{cases} a+b+c\text{ — чётное,} \\ \max\left\{a-b,\dfrac{a+b-2}{3}\right\}\leq c\leq \min\{a+b,3b-a+2\}. \end{cases} \qquad (1)$$

В частности, для некоторых a и b не будет существовать ни одного целого c, удовлетворяющего условиям (1), тогда эти значения a и b являются недопустимыми.

То, что условия (1) являются необходимыми, следует из **1°**, **2°**, **3°**. Теперь докажем, что любое целое c, удовлетворяющее условиям (1), действительно может достигаться. Итак, пусть заданы целые неотрицательные числа a, b, c такие, что $b\leq a$ и выполнены условия (1). Тогда выполнены и условия **1°**, **2°**, **3°**. По формуле $n=\frac{a+b+c}{2}$ находим общее количество партий. Распределим участников партий следующим образом.

Сначала рассмотрим случай, когда $c=\frac{n-1}{2}$. Значит, n — нечётное. Тогда запишем Колю на все партии с чётными номерами (он всё время проигрывает), их будет как раз $\frac{n-1}{2}$. Васю запишем на все нечётные партии (их $\frac{n+1}{2}$ штук) и на $a-\frac{n+1}{2}$ чётных. Федю запишем на все нечётные партии и на $b-\frac{n+1}{2}$ чётных.[1] Поскольку $\left(a-\frac{n+1}{2}\right)+\left(b-\frac{n+1}{2}\right)=a+b-n-1=2n-c-n-1=\frac{n-1}{2}$, то все чётные партии, как и нечётные, будут заполнены, а игроки Вася, Федя и Коля участвуют в a, b и c партиях соответственно.

Теперь рассмотрим случай, когда $b=\frac{n-1}{2}$. Значит, n — нечётное. Тогда запишем Федю на все партии с чётными номерами. Васю запишем на все нечётные партии и на $a-\frac{n+1}{2}$ чётных.[2] Колю запишем на все нечётные партии и на $c-\frac{n+1}{2}$ чётных.[3] Поскольку $\left(a-\frac{n+1}{2}\right)+\left(c-\frac{n+1}{2}\right)=a+c-n-1=2n-b-n-1=\frac{n-1}{2}$, то все чётные партии, как и нечётные, будут заполнены, а игроки Вася, Федя и Коля участвуют в a, b и c партиях соответственно.

[1] Условие $a\geq b\geq\frac{n+1}{2}$ следует из $\frac{n+1}{2}=n-c=\frac{a+b-c}{2}$ и $a\leq b+c$.

[2] Условие $a\geq\frac{n+1}{2}$ следует из $\frac{n+1}{2}=n-b=\frac{a-b+c}{2}$ и $c\leq a+b$.

[3] Условие $c\geq\frac{n+1}{2}$ следует из $\frac{n+1}{2}=n-b=\frac{a-b+c}{2}$ и $a\leq b+c$.

Теперь рассмотрим общий случай, когда $c > \frac{n-1}{2}$ и $a \geq b > \frac{n-1}{2}$.

Вася (a)	+		+		+		+		+	+	+	+	+	
Федя (b)		+		+		+		+	+		+		+	+
Коля (c)	+	+	+	+	+	+	+	+		+		+		+
	$\underbrace{\qquad}_{2c-n}$								$\underbrace{\qquad}_{2n-2c}$					

Пусть Коля сначала играет $2c - n$ партий подряд (и выигрывает каждую из них, кроме последней, которую проигрывает)[4], а затем в $2n - 2c$ партиях он участвует через раз (т.е. всё время проигрывает). Тогда всего Коля сыграет $(2c - n) + (n - c) = c$ раз.

В тех партиях, в которых Коля не участвует, должны играть и Вася, и Федя. Таких партий будет $n - c$.[5]

Теперь распределим оставшиеся места среди Васи и Феди. Пусть в первых $2c - n$ партиях Вася и Федя чередуются, начиная с Васи. При этом Вася сыграет $c - \left[\frac{n}{2}\right]$ раз[6], а Федя сыграет $c - \left[\frac{n+1}{2}\right]$ раз[7]. В оставшиеся $n - c$ партии, в которые уже записан Коля, запишем Васю $a - \left(c - \left[\frac{n}{2}\right]\right) - (n - c)$ раз, а Федю запишем $b - \left(c - \left[\frac{n+1}{2}\right]\right) - (n - c)$ раз. В сумме как раз получится $a + b + \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n+1}{2}\right] - 2n = a + b - n = n - c$ раз. При этом Вася сыграет всего a раз, Федя — b раз, и в каждой партии участвуют ровно два игрока.

Полученное распределение удовлетворяет всем условиям задачи, что и требовалось доказать.

Для примера приведём все возможные значения c для $0 \leq b \leq a \leq 3$:

b \ a	0	1	2	3
0	$c = 0$	$c = 1$	не допустимо	не допустимо
1		$c = 0; 2$	$c = 1; 3$	$c = 2$
2			$c = 2; 4$	$c = 1; 3; 5$
3				$c = 2; 4; 6$

[4] Условие $2c - n \geq 0$ следует из $c > \frac{n-1}{2}$.

[5] Условие $a \geq b \geq n - c$ следует из $a \leq b + c$.

[6] Условие $a \geq (n - c) + \left(c - \left[\frac{n}{2}\right]\right)$ следует из $a \geq b > \frac{n-1}{2}$.

[7] Условие $b \geq (n - c) + \left(c - \left[\frac{n+1}{2}\right]\right)$ следует из $b > \frac{n-1}{2}$.