Конкурсная задача ММ194 (6 баллов)

Из n натуральных чисел, идущих подряд, выбрали 6 и разбили их на две тройки. При этом оказалось, что площади треугольников, стороны которых равны числам из этих троек, равны. При каком наименьшем n возможна такая ситуация?

Ответ. При $n = 8$.

Решение. По формуле Герона площадь треугольника с длинами сторон a, b, c равна

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где $p = \frac{a+b+c}{2}$ — полупериметр.

Обозначим длины сторон треугольников через a_1, b_1, c_1 и a_2, b_2, c_2 соответственно. Из равенства площадей треугольников $S_1 = S_2$ следует равенство

$$\Pi_1 = \Pi_2,$$

где

$$\Pi_i = 16S_i^2 = P_i(P_i - 2a_i)(P_i - 2b_i)(P_i - 2c_i), \qquad P_i = a_i + b_i + c_i \text{ — периметр},$$
$$i = 1, 2.$$

Лемма. Для того чтобы площади целочисленных треугольников были равны, необходимо, чтобы их периметры были одинаковой чётности.

Доказательство. Пусть $S_1 = S_2$, тогда $\Pi_1 = \Pi_2$. Из выражения для Π_i следует, что Π_i и P_i имеют одинаковую чётность.

Докажем, что n не может быть равно 6. Предположим, что $n = 6$. Среди шести подряд идущих натуральных чисел всегда три чётных и три нечётных. Как бы мы ни разбили их на две тройки, у одного треугольника периметр будет чётный, а у другого — нечётный. Поэтому равенство площадей невозможно. Значит, n не может быть равно 6.

Докажем, что n не может быть равно 7. Предположим, что $n = 7$.

Семь подряд идущих натуральных чисел можно записать в виде

$$k-3, \qquad k-2, \qquad k-1, \qquad k, \qquad k+1, \qquad k+2, \qquad k+3,$$

где $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 4$. Выберем из них две непересекающиеся тройки чисел, которые объявим длинами сторон двух треугольников[1], так, что

1) число $k-3$ принадлежит первому треугольнику (для определённости),
2) периметры треугольников имеют одинаковую чётность.

[1] Будем предполагать, что эти числа таковы, что соответствующие треугольники существуют. Когда конкретные числа будут найдены, условие существования треугольников можно будет проверить.

В каждом случае запишем уравнение $\Pi_1 = \Pi_2$. Соответствующие уравнения после тождественных преобразований (на множестве $k \geq 4$) для всех возможных случаев, удовлетворяющих условиям 1), 2), представлены в таблице (всего 30 случаев):

№	a_1, b_1, c_1	P_1	a_2, b_2, c_2	P_2	$\Pi_1 = \Pi_2$
1	$k-3, k-2, k-1$	$3k-6$	$k, k+1, k+3$	$3k+4$	$5k^2+3k+4=0$
2	$k-3, k-2, k-1$	$3k-6$	$k+1, k+2, k+3$	$3k+6$	$k^2+2=0$
3	$k-3, k-2, k$	$3k-5$	$k-1, k+1, k+3$	$3k+3$	$8k^2-21k-5=0$
4	$k-3, k-2, k+1$	$3k-4$	$k-1, k, k+3$	$3k+2$	$15k^2-22k-8=0$
5	$k-3, k-2, k+1$	$3k-4$	$k-1, k+2, k+3$	$3k+4$	$k^2-3=0$
6	$k-3, k-2, k+2$	$3k-3$	$k-1, k+1, k+3$	$3k+3$	$2k^2+k-9=0$
7	$k-3, k-2, k+3$	$3k-2$	$k-1, k, k+1$	$3k$	$k^2+11k-8=0$
8	$k-3, k-2, k+3$	$3k-2$	$k-1, k+1, k+2$	$3k+2$	$k^2+2k-2=0$
9	$k-3, k-1, k$	$3k-4$	$k-2, k+1, k+3$	$3k+2$	$(k-4)(3k^2+3k-2)=0$
10	$k-3, k-1, k$	$3k-4$	$k+1, k+2, k+3$	$3k+6$	$5k^2-3k+4=0$
11	$k-3, k-1, k+1$	$3k-3$	$k-2, k, k+3$	$3k+1$	$(k-5)(4k^2+9k-1)=0$
12	$k-3, k-1, k+1$	$3k-3$	$k-2, k+2, k+3$	$3k+3$	$2k^2-k-9=0$
13	$k-3, k-1, k+1$	$3k-3$	$k, k+2, k+3$	$3k+5$	$8k^2+21k-5=0$
14	$k-3, k-1, k+2$	$3k-2$	$k-2, k+1, k+3$	$3k+2$	$k^2-6=0$
15	$k-3, k-1, k+2$	$3k-2$	$k, k+1, k+3$	$3k+4$	$3k^2-3k-2=0$
16	$k-3, k-1, k+3$	$3k-1$	$k-2, k, k+1$	$3k-1$	$7k+11=0$
17	$k-3, k-1, k+3$	$3k-1$	$k-2, k+1, k+2$	$3k+1$	$2k^2+5k-1=0$
18	$k-3, k-1, k+3$	$3k-1$	$k, k+1, k+2$	$3k+3$	$4k^2+25k-11=0$
19	$k-3, k, k+1$	$3k-2$	$k-2, k-1, k+3$	$3k$	$6k^2-41k+10=0$
20	$k-3, k, k+1$	$3k-2$	$k-1, k+2, k+3$	$3k+4$	$3k^2+9k-4=0$
21	$k-3, k, k+2$	$3k-1$	$k-1, k+1, k+3$	$3k+3$	$4k^2-9k-1=0$
22	$k-3, k, k+3$	$3k$	$k-2, k-1, k+1$	$3k-2$	$k^2-11k-2=0$
23	$k-3, k, k+3$	$3k$	$k-1, k+1, k+2$	$3k+2$	$k^2+11k-2=0$
24	$k-3, k+1, k+2$	$3k$	$k-2, k-1, k+3$	$3k$	$96=0$
25	$k-3, k+1, k+2$	$3k$	$k-1, k, k+3$	$3k+2$	$(k-4)(k^2+9k+2)=0$
26	$k-3, k+1, k+3$	$3k+1$	$k-2, k-1, k$	$3k-3$	$4k^2-25k-11=0$
27	$k-3, k+1, k+3$	$3k+1$	$k-2, k-1, k+2$	$3k-1$	$(k-5)(2k^2-5k+1)=0$
28	$k-3, k+1, k+3$	$3k+1$	$k-1, k, k+2$	$3k+1$	$7k-11=0$
29	$k-3, k+2, k+3$	$3k+2$	$k-2, k-1, k+1$	$3k-2$	$(k-4)(k^2-2k-2)=0$
30	$k-3, k+2, k+3$	$3k+2$	$k-1, k, k+1$	$3k$	$k^2-11k-8=0$

В каждом из этих случаев уравнение $\Pi_1 = \Pi_2$ свелось к совокупности квадратных и линейных уравнений относительно k, корни которых находятся по явным формулам. Поэтому в каждом случае можно найти корни и убедиться, что натуральные корни есть только в следующих случаях:

№9) $k = 4$. Но треугольников со сторонами 1, 3, 4 и 2, 5, 7 не существует;

№11) $k = 5$. Но треугольников со сторонами 2, 4, 6 и 3, 5, 8 не существует;

№25) $k = 4$. Но треугольников со сторонами 1, 5, 6 и 3, 4, 7 не существует;

№27) $k = 5$. Но треугольников со сторонами 2, 6, 8 и 3, 4, 7 не существует;

№29) $k = 4$. Но треугольников со сторонами 1, 6, 7 и 2, 3, 5 не существует.

Таким образом, доказано, что n не может быть равно 7.

Докажем, что n может быть равно 8. Рассмотрим восемь подряд идущих натуральных чисел: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Площадь треугольников со сторонами 3, 8, 10 и 4, 5, 6 одинакова и равна $\frac{15\sqrt{7}}{4}$.