Конкурсная задача ММ196 (9 баллов)

1. Три корабля A, B, C движутся прямолинейно и равномерно.
2. Когда корабль A находился ближе всего к маяку, расстояние между B и C было 30 миль.
3. Когда корабль B находился ближе всего к маяку, расстояние между A и C было 40 миль.
4. Когда корабль C находился ближе всего к маяку, расстояние между A и B было 14 миль.
5. В 12:00 расстояния от маяка до всех кораблей были одинаковыми.
6. В 13:00 расстояния от маяка до всех кораблей были одинаковыми.
7. В 14:00 расстояния от маяка до всех кораблей были одинаковыми.
8. В 15:00 корабль B пересёк маршрут корабля A.
9. В 16:00 корабль A пересёк маршрут корабля B.

Найти скорость каждого корабля.

Примечание: Все корабли и маяк — материальные точки.

Решение. Обозначим скорости кораблей A, B, C через $\vec{v}_A$, $\vec{v}_B$, $\vec{v}_C$ соответственно. Из условия 1 задачи следует, что скорости кораблей постоянны. Примем точку, в которой находится маяк, за начало отсчёта. Будем описывать положение кораблей в каждый момент времени t с помощью радиус-векторов, проведённых из начала отсчёта в точку, в которой в этот момент находится соответствующий корабль: $\vec{r}_A(t), \vec{r}_B(t), \vec{r}_C(t)$. Время t будем измерять в часах, за начало отсчёта времени $t = 0$ примем 12:00. Расстояния будем измерять в милях, скорости — в милях в час.

Пусть корабль A находился ближе всего к маяку в момент времени t_A, и при этом его положение описывалось радиус-вектором $\vec{r}_A^{(0)}$. Тогда закон движения корабля A имеет вид

$$\vec{r}_A(t) = \vec{r}_A^{(0)} + \vec{v}_A(t - t_A).$$

Поскольку $\left|\vec{r}_A^{(0)}\right|$ — это минимальное расстояние от корабля A до маяка, то вектор $\vec{r}_A^{(0)}$ должен быть перпендикулярен траектории движения корабля, а следовательно, и вектору $\vec{v}_A$, т.е. их скалярное произведение должно быть равно нулю:

$$\left(\vec{r}_A^{(0)}, \vec{v}_A\right) = 0.$$

Аналогично можно записать законы движения кораблей B и C:

$$\vec{r}_B(t) = \vec{r}_B^{(0)} + \vec{v}_B(t - t_B),$$

$$\vec{r}_C(t) = \vec{r}_C^{(0)} + \vec{v}_C(t - t_C),$$

где $\vec{r}_B^{(0)}$, $\vec{r}_C^{(0)}$ — радиус-векторы кораблей B, C в моменты времени t_B, t_C, когда соответствующие корабли находились ближе всего к маяку. При этом

$$\left(\vec{r}_B^{(0)}, \vec{v}_B\right) = 0,$$

$$\left(\vec{r}_C^{(0)}, \vec{v}_C\right) = 0.$$

Условия 5, 6, 7 задачи можно записать в виде

$$|\vec{r}_A(0)| = |\vec{r}_B(0)| = |\vec{r}_C(0)|,$$

$$|\vec{r}_A(1)| = |\vec{r}_B(1)| = |\vec{r}_C(1)|,$$

$$|\vec{r}_A(2)| = |\vec{r}_B(2)| = |\vec{r}_C(2)|.$$

Возведя эти равенства в квадрат и подставив сюда законы движения кораблей, с учётом ортогональности векторов $\vec{r}_A^{(0)}$ и $\vec{v}_A$, $\vec{r}_B^{(0)}$ и $\vec{v}_B$, $\vec{r}_C^{(0)}$ и $\vec{v}_C$, получим

$$\left|\vec{r}_A^{(0)}\right|^2 + |\vec{v}_A|^2 t_A^2 = \left|\vec{r}_B^{(0)}\right|^2 + |\vec{v}_B|^2 t_B^2 = \left|\vec{r}_C^{(0)}\right|^2 + |\vec{v}_C|^2 t_C^2, \tag{1}$$

$$\left|\vec{r}_A^{(0)}\right|^2 + |\vec{v}_A|^2 (1 - t_A)^2 = \left|\vec{r}_B^{(0)}\right|^2 + |\vec{v}_B|^2 (1 - t_B)^2 = \left|\vec{r}_C^{(0)}\right|^2 + |\vec{v}_C|^2 (1 - t_C)^2, \tag{2}$$

$$\left|\vec{r}_A^{(0)}\right|^2 + |\vec{v}_A|^2 (2 - t_A)^2 = \left|\vec{r}_B^{(0)}\right|^2 + |\vec{v}_B|^2 (2 - t_B)^2 = \left|\vec{r}_C^{(0)}\right|^2 + |\vec{v}_C|^2 (2 - t_C)^2. \tag{3}$$

Вычтя из уравнений (2) и (3) уравнение (1), получим

$$|\vec{v}_A|^2 (1 - 2t_A) = |\vec{v}_B|^2 (1 - 2t_B) = |\vec{v}_C|^2 (1 - 2t_C), \tag{4}$$

$$|\vec{v}_A|^2 (4 - 4t_A) = |\vec{v}_B|^2 (4 - 4t_B) = |\vec{v}_C|^2 (4 - 4t_C). \tag{5}$$

Вычтя из уравнения (5) удвоенное уравнение (4), получим

$$2|\vec{v}_A|^2 = 2|\vec{v}_B|^2 = 2|\vec{v}_C|^2.$$

Значит, модули скоростей всех кораблей равны. Обозначим их через v_0:

$$|\vec{v}_A| = |\vec{v}_B| = |\vec{v}_C| = v_0.$$

Подставив их в уравнение (4), получим, что

$$t_A = t_B = t_C.$$

Обозначим эти величины через t_0:

$$t_A = t_B = t_C = t_0.$$

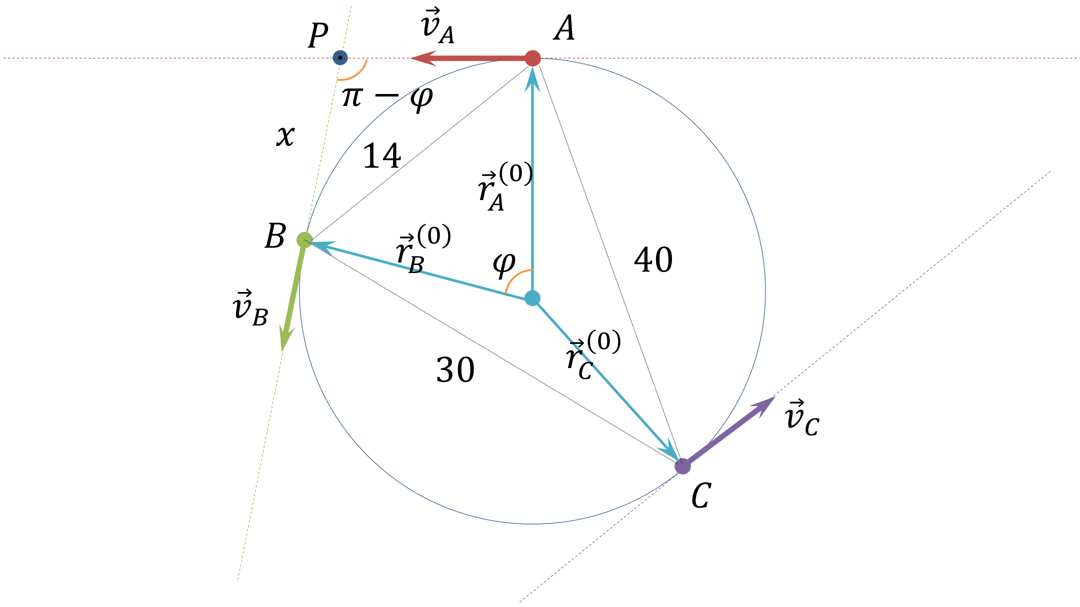
Тогда из уравнения (1) получим, что

$$\left|\vec{r}_A^{(0)}\right| = \left|\vec{r}_B^{(0)}\right| = \left|\vec{r}_C^{(0)}\right|.$$

Обозначим эти величины через r_0:

$$\left|\vec{r}_A^{\,(0)}\right| = \left|\vec{r}_B^{\,(0)}\right| = \left|\vec{r}_C^{\,(0)}\right| = r_0.$$

Итак, *скорости всех кораблей одинаковы по модулю, минимальные расстояния от каждого корабля до маяка одинаковы и достигаются в один и тот же момент времени.* Из условий 2, 3, 4 задачи следует, что в момент времени t_0 корабли A, B, C находились на окружности радиуса r_0 с маяком в центре, их скорости были направлены по касательной к этой окружности, и известны расстояния между кораблями в этот момент времени:



Найдём площадь треугольника ABC по формуле Герона:

$$S_{ABC} = \sqrt{42 \cdot 28 \cdot 12 \cdot 2} = 8 \cdot 3 \cdot 7 = 168.$$

Найдём радиус окружности, описанной около треугольника ABC:

$$r_0 = \frac{14 \cdot 30 \cdot 40}{4 \cdot 168} = 25.$$

Обозначим через φ угол между векторами $\vec{r}_A^{\,(0)}$ и $\vec{r}_B^{\,(0)}$. По теореме косинусов находим

$$\cos\varphi = \frac{r_0^2 + r_0^2 - 14^2}{2 \cdot r_0 \cdot r_0} = \frac{527}{625}.$$

Угол между скоростями $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ равен либо φ, либо $\pi - \varphi$, в зависимости от того, куда направлены эти векторы. Если бы он был равен $\pi - \varphi$, то корабли A и B пересекли бы траектории друг друга одновременно (поскольку отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки, равны), что противоречило бы условиям 8 и 9 задачи. Поэтому угол между скоростями $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ равен φ.

Обозначим через P точку пересечения траекторий кораблей A и B. По теореме косинусов находим расстояние x от кораблей A, B в момент времени t_0 до точки P:

$$x^2 + x^2 + 2x^2 \cos\varphi = 14^2,$$

$$x = \sqrt{\frac{98}{1+\frac{527}{625}}} = \frac{175}{24}.$$

Из условий 8 и 9 задачи следует, что

$$x = v_0(t_0 - 3) = v_0(4 - t_0),$$

откуда находим

$$t_0 = 3{,}5; \quad v_0 = 2x = \frac{175}{12}.$$

Значит, величина скорости каждого корабля равна $\frac{175}{12}$ миль в час.

Ответ: величина скорости каждого корабля равна $\frac{175}{12}$ миль в час.