Конкурсная задача ММ199 (5 баллов)

Будем говорить, что данный многоугольник имеет род m, если у него m многоугольных дыр. Сколькими внутренними диагоналями и на сколько треугольников триангулируется n-угольник рода m?

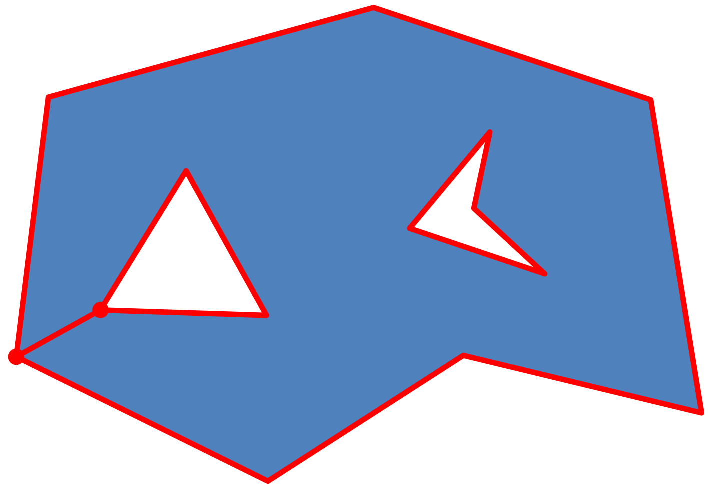
Ответ. На $n+2m-2$ треугольника, с помощью $n+3m-3$ диагоналей.

Решение. Если $m=0$, то, как известно, n-угольник без дыр триангулируется на $n-2$ треугольника с помощью $n-3$ внутренних диагоналей.

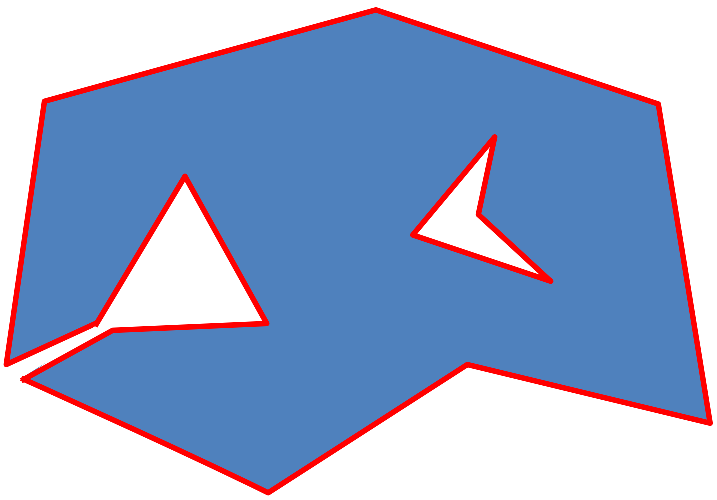
Теперь рассмотрим n-угольник рода m, где $m \geq 1$.

Лемма. Для любого n-угольника рода $m \geq 1$ найдётся внутренняя диагональ, соединяющая одну внутреннюю и одну внешнюю вершину. Доказательство см. в конце.

Воспользовавшись утверждением леммы, соединим одну внутреннюю и одну внешнюю вершину внутренней диагональю:



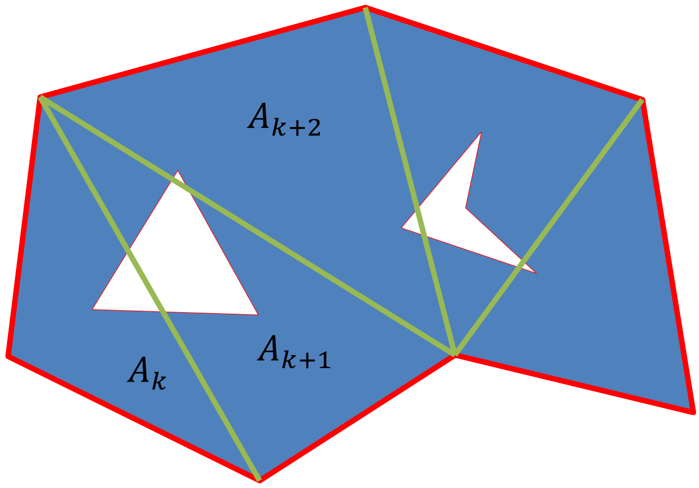
Полученную фигуру можно рассматривать как предельный случай многоугольника, у которого есть сколь угодно малый зазор между сторонами:



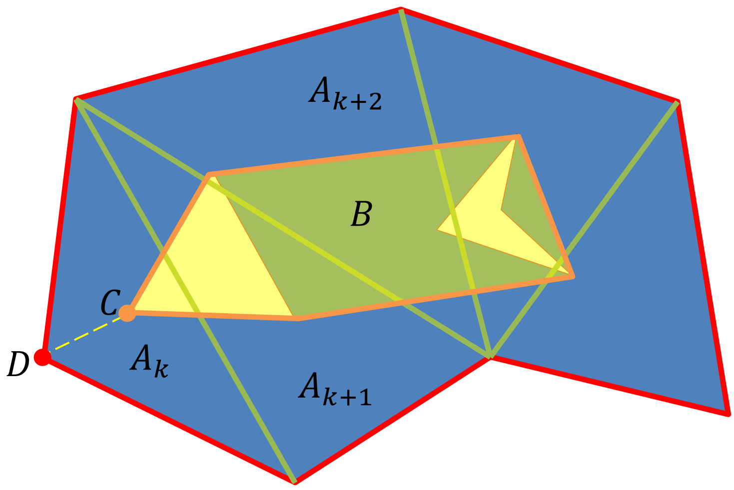
При этом у полученного многоугольника будет $n+2$ вершины, а его род равен $m-1$.

Далее можно применить лемму ещё раз и понизить род ещё на 1, и т.д. В конце концов, проведя m внутренних диагоналей, получим $(n+2m)$-угольник рода 0, который триангулируется на $n+2m-2$ треугольника с помощью $n+2m-3$ диагоналей, значит, всего было проведено $n+3m-3$ диагонали.

Доказательство леммы. Рассмотрим n-угольник рода $m \geq 1$. Сначала забудем про дыры и рассмотрим многоугольник, образованный только внешними вершинами. Его можно разбить внутренними диагоналями на треугольники A_k:



Теперь построим выпуклую оболочку B внутренних вершин многоугольника:



Рассмотрим одну из вершин C выпуклой оболочки B. Она принадлежит некоторому треугольнику A_k. Поскольку B — выпуклое множество, то все три вершины треугольника A_k не могут принадлежать B (иначе весь треугольник A_k содержится в B, и тогда вершина C является внешней, а не внутренней). Поэтому найдётся вершина D треугольника A_k, не принадлежащая B. Тогда её можно соединить с точкой C отрезком CD, который будет лежать внутри треугольника A_k (поскольку треугольник — выпуклое множество), но вне B (за исключением случая, когда на отрезке CD находится ещё другая вершина многоугольника B). Это и будет искомая диагональ, соединяющая одну внешнюю и одну внутреннюю вершину. Что и требовалось доказать.