Конкурсная задача ММ201 (3 балла)

Для каждого натурального k найти все возможные n, при которых множество $\{1, 2, \dots, n\}$ можно разбить на классы так, что наибольший элемент в каждом классе ровно в k раз больше количества элементов класса.

Решение. Пусть указанное разбиение возможно. (Я полагаю, что имеется в виду разбиение на непересекающиеся классы.) Тогда число n обязано быть наибольшим элементом в некотором классе, поэтому оно должно делиться на k, т.е. $n = mk$, где $m \in \mathbb{N}$. И вообще наибольший элемент в каждом классе должен делиться на k. Всего таких элементов m штук:

$k, 2k, \dots, mk$.

Поэтому классов может быть не более чем m штук. Число элементов в каждом классе в k раз меньше наибольшего элемента класса, поэтому общее количество элементов множества не превосходит

$1 + 2 + \dots + m$.

Таким образом, выполняется неравенство

$1 + 2 + \dots + m \geq n$.

Поскольку $n = mk$, $1 + 2 + \dots + m = \frac{m(m+1)}{2}$, то получим

$$\frac{m(m+1)}{2} \geq mk,$$

т.е.

$m \geq 2k - 1$.

Таким образом, необходимое условие того, что указанное разбиение на классы возможно, состоит в том, что

$$n = mk, \qquad \text{где } m \in \mathbb{N}, m \geq 2k - 1. \tag{1}$$

Теперь докажем, что это условие является достаточным.

Пусть n удовлетворяет условию (1). Пусть m_0 — такое натуральное число, что

$m + (m-1) + \dots + (m_0 + 1) < n \leq m + (m-1) + \dots + (m_0 + 1) + m_0$.

Обозначим $\Delta n = n - \big(m + (m-1) + \dots + (m_0 + 1)\big)$. Заметим, что $1 \leq \Delta n \leq m_0$.

Теперь разобьём множество $\{1, 2, \dots, n\}$ на классы следующим образом.

Сначала в каждый класс поместим соответственно по одному числу из следующих:

$$k \cdot \Delta n, \qquad k(m_0 + 1), \qquad k(m_0 + 2), \qquad \dots, \qquad k(m - 1), \qquad km.$$

Все остальные числа разместим по классам таким образом, чтобы в каждом классе было нужное количество элементов и чтобы все остальные элементы были меньше того элемента, который мы поместили в класс самым первым.

Докажем, что это можно сделать. В первый класс поместим числа от 1 до $(\Delta n - 1)$. В последнем классе должно быть m элементов, и т.к. $m \geq 2k - 1 \geq k$, то все числа от $k(m-1)+1$ до km можно поместить в последний класс. Поэтому в предпоследнем классе не будет чисел, больших $k(m-1)$. В предпоследнем классе должно быть $(m-1)$ элементов, и т.к. $m \geq 2k - 1 \geq k$, то все числа от $k(m-2)+1$ до $k(m-1)$, которые ещё не были размещены в последнем классе, можно поместить в предпоследний класс. Поэтому в предпредпоследнем классе не будет чисел, больших $k(m-2)$. И так далее. В результате все числа, большие $k(m_0+1)$, окажутся в третьем и последующих классах. Все оставшиеся числа войдут во второй класс.

Указанное разбиение на классы удовлетворяет всем условиям задачи. Поэтому условие (1) является необходимым и достаточным условием того, что множество $\{1, 2, \dots, n\}$ можно разбить на классы указанным образом.

Ответ. $n = mk$, где $m \in \mathbb{N}, m \geq 2k - 1$.