MM233

При каких значениях параметра a множество точек плоскости, задаваемых системой

$$(x-a+1)^2+(y-3)^2 \le 80 \qquad (1)$$

$$(x-3)^2+(y-4a+1)^2 \le 20a^2 \qquad (2)$$

$$|x+3y+115-a|+|4x+3y-115+a| = 230-2a \qquad (3)$$

является кругом?

Решение:

Полагаем, что точка является кругом с нулем радиусом.

Из (3) следует

$$a \le 115 \qquad (4)$$

Неравенство (1) задает круг $R1$ с радиусом $R_1=\sqrt{80}\approx 8.94$ и центром (x_1,y_1), где $x_1=a-1$, $y_1=3$. Центр круга $R1$ при изменении параметра a от $-\infty$ до 115 передвигается вдоль прямой $y=3$ вправо от $x=-\infty$ до $x=114$, при этом радиус круга $R_1=\sqrt{80}\approx 8.94$ остается неизменным.

Неравенство (2) задает круг $R2$ с радиусом $R_2=|a|\sqrt{20}\approx 4.47|a|$ и центром (x_2,y_2), где $x_2=3$, $y_2=4a-1$. Центр круга $R2$ при изменении параметра a от $-\infty$ до 115 передвигается снизу вверх вдоль прямой $x=3$ от $y=-\infty$ до $y=459$, при этом радиус круга R_2 уменьшается линейно от $+\infty$ до 0 при $a=0$, а затем возрастает линейно от 0 до $+\infty$.

Равенство (3) задает полосу D. Действительно, при замене $z=4x+3y$ и $b=115-a\ge 0$ (3) переходит в уравнение

$|z+b|+|z-b|=2b$ или $b\ge|z|$, или $-b\le z\le b$ (5)

Неравенство (5) задает область Рис.1.

При переходе к переменным x,y,a (5) переходит к неравенству

$$\frac{-4x-115+a}{3}\le y\le \frac{-4x+115-a}{3} \quad , \qquad (6)$$

задающую полосу D , ограниченную двум параллельными прямыми

$$y1(x) = -\frac{-4x+115-a}{3} \qquad (7)$$

$$y2(x) = -\frac{-4x-115-a}{3}, \qquad (8)$$

расстояние между которыми по оси y $y1(x)-y2(x)=\frac{2b}{3}=\frac{230-2a}{3}$. При a=115 полоса вырождается в прямую $y0(x)=\frac{-4x}{3}$ (Рис. 2).

При изменении параметра a от $-\infty$ до 115 ширина полосы уменьшается линейно по оси y от $+\infty$ до 0 при $a=115$

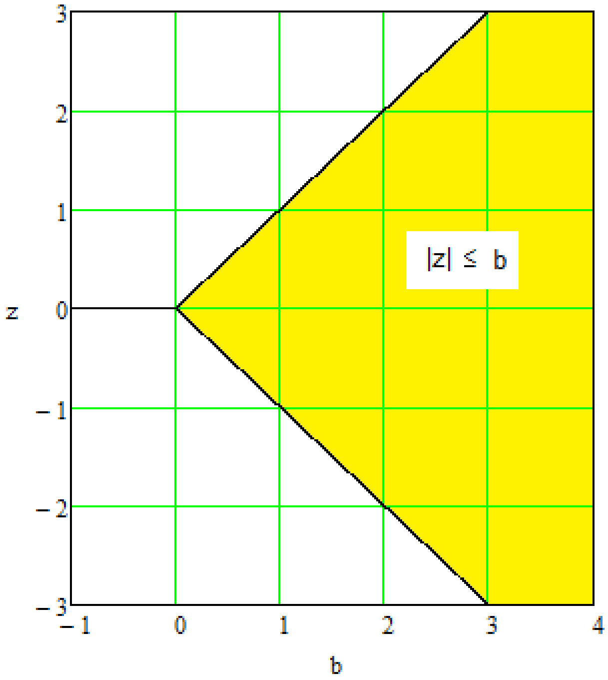


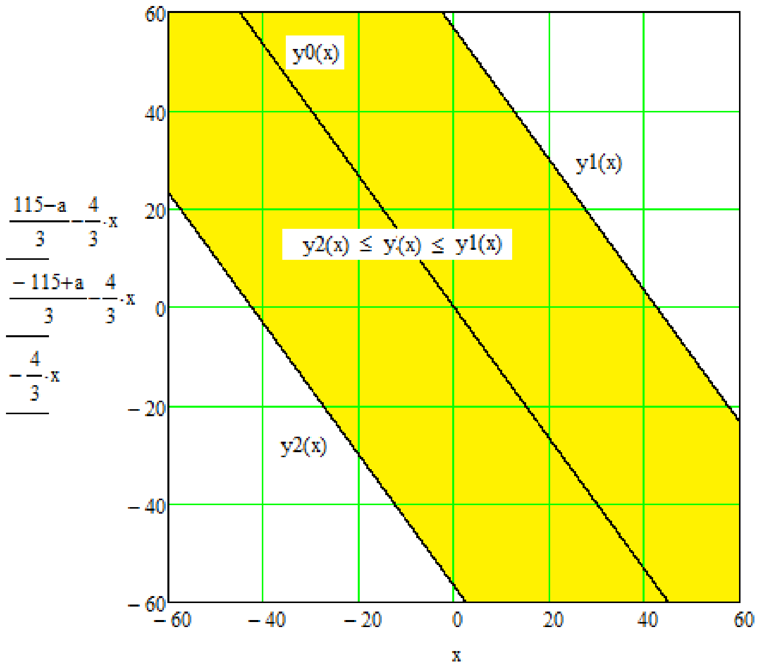
Рис. 1

$a := -55$

$y0(x) := -\frac{4}{3}\cdot x$

$y1(x) := -\frac{4}{3}\cdot x + \frac{115}{3} - \frac{a}{3}$

$y2(x) := -\frac{4}{3}\cdot x - \frac{115}{3} + \frac{a}{3}$



$y2(x) \le y(x) \le y1(x)$

эквивалентно равентству (3)

Рис. 2

Выделим характерные значения параметра a, которые характеризуют взаимное расположение кругов $R1$ и $R2$ и полосы D.

1)

При $a \in (-\infty, a_1)$, (9)

где параметр a_1, при котором круг $R1$ коснется внешней полосы D, круг $R1$ будет находиться внутри круга $R2$. При этом граница круга $R2$ пересекает границу полосы D , а круг $R1$ будет находиться вне полосы D. В этом случае множество точек (x, y), удовлетворяющей системе (1)-(3) пусто. Рис.3 при $a = -60 \in (-\infty, a_1)$.

Определим a_1 из условия: расстояние от центра круга $R1$ $\left(x_1, y_1\right) = (a-1, 3)$ до границы $y2(x) = Ax + By + C_1 = \frac{4}{3}x + y + \frac{115}{3} - \frac{a}{3}$

$$\delta_2 = -\frac{Ax_1 + By_1 + C_1}{\sqrt{A^2+B^2}} = -\frac{\frac{4}{3}a - \frac{4}{3} + 3 + \frac{115}{3} - \frac{a}{3}}{\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 1}} = -\frac{3}{5}\frac{3a+120}{3} = -\frac{3a+120}{5} = R_1 = \sqrt{80} \approx 8.94 \qquad (10)$$

Отсюда $a_1 = -\frac{5}{3}\sqrt{80} - 40 \approx -54.3.$ (11)

Круг $R1$ находится внутри круга $R2$ при условии

$$R_2 - d_{12} > R_1, \qquad (12)$$

где $d_{12} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(a-4)^2 + (4a-4)^2}$ - расстояние между центрами кругов. (Можно доказать, что неравенство (12) выполняется при $a \in (-\infty, a_1)$). А сам круг $R1$ находится вне полосы, т.к. $\delta_2 > R_1$.

2)

При $a = a_1 = -\frac{5}{3}\sqrt{80} - 40 \approx -54.3$ (13)

круг $R1$ касается внешней полосы D, круг $R1$ будет находиться внутри круга $R2$. При этом граница круга $R2$ пересекает границу полосы D , а круг $R1$ будет находиться вне полосы D. В этом случае множество точек (x, y), удовлетворяющей системе (1)-(3) состоит из одной точки, которую по договоренности можно рассматривать, как круг с нулевым радиусом . Рис.4 при $a = a_1 = -\frac{5}{3}\sqrt{80} - 40 \approx -54.3.$

3) При дальнейшем увеличении параметра $a \in (a_1, a_2]$ круг $R1$ начнет пересекать границу $y1(x)$ полосы D до тех пор, пока круги $R1$ и $R2$ не коснуться друг друга с внутренней стороны при $a = a_2$.

a_2 определим из условия $R_2 - d_{12} = R_1$ (14)

$$a_2 = -20 - 8\sqrt{6} \approx -39.6 \qquad (15)$$

Рис.5 при $a = -50 \in (-\frac{5}{3}\sqrt{80} - 40, -20 - 8\sqrt{6}]$.

При $a \in (a_1, a_2]$ множество точек (x, y), удовлетворяющей системе (1)-(3) существует, но не является кругом.

Рис. 6 при $a = a_2 = -20 - 8\sqrt{6} \approx -39.6$.

4) При дальнейшем увеличении параметра $a \in (a_2, a_3)$ круг $R1$ начнет пересекаться с $R2$ и полосой (Рис. 7 при $a_2 = -30$) . Затем только с $R2$ (Рис. 8 $a_2 = -20$) . Круг $R2$ при уменьшении радиуса R_2 перемеситься внутрь полосы (Рис. 9 $a_2 = -3$) сравняется с $R1$ (Рис. 10 при $a_2 = -2$) , а затем начнет уменьшаться (Рис. 11 при $a_2 = -1$)пока круги $R1$ и $R2$ не коснуться друг друга с внутренней стороны при $a = a_3$.

a_3 определим из условия касания кругов с внутренней стороны:

$$R_2 + d_{12} = R_1 \qquad (16)$$

$$a_3 = -20 + 8\sqrt{6} \approx -0.404 \qquad (17)$$

Главное здесь то, что при $a \in (a_2, a_3)$ круг $R1$ пересекаться с $R2$ и множество точек (x, y), удовлетворяющей системе (1)-(3) существует, но не является кругом.

5) При $a = a_3 = -20 + 8\sqrt{6} \approx -0.404$ круги $R1$ и $R2$ касаются друг друга с внутренней стороны (Рис. 12). При дальнейшем увеличении параметра $a \in (a_3, a_4)$ радиус круга R_2 уменьшается до 0 при $a = a_4 = 0$ (Рис. 13,14 при $a = -0.2, 0$). Далее радиус круга R_2 вновь начнет возрастать (Рис. 15 при $a = 1$)пока круг $R2$ не коснется круга $R1$ при $a = a_5$.
a_5 определим из условия касания кругов с внутренней стороны:

$$R_2 + d_{12} = R_1 \quad (18)$$

$$a_5 = \frac{4}{3} \quad (19)$$

(Рис. 16 при $a_5 = \frac{4}{3}$) .
Главное здесь то, что при $a \in [a_3, a_5]$ круг $R2$ находится в круге $R1$, а он в свою очередь в полосе D, и множество точек (x, y) удовлетворяет системе (1)-(3) и является кругом.

6) При дальнейшем увеличении параметра $R1$ круг $R2$ начнет пересекаться с $R1$ (Рис. 17 при $a = 2.5$) . Затем с полосой (Рис. 18 $a = 8$) пока круги $R2$ и $R1$ не коснуться с внутренней стороны друг друга при $a = a_6$.
a_6 определим из условия касания кругов с внутренней стороны:

$$R_2 + d_{12} = R_1 \quad (20)$$

$$a_6 = 12 \quad (21)$$

Здесь при $a \in (a_5, a_6)$ круг $R2$ пересекает круг $R1$, а он с свою очередь находится в полосе D, и множество точек (x, y) удовлетворяет системе (1)-(3) , но не является кругом.

7) При $a = a_6 = 12$ круги $R1$ и $R2$ касаются друг друга с внутренней стороны (Рис. 19). При дальнейшем увеличении параметра $a \in (a_6, a_7)$ радиус круга R_2 возрастет (Рис. 20 при $a = 12.7$), и круг $R1$ оказывается внутри круг $R2$ до тех пор пока не коснется полосы с внутренней стороны из-за уменьшения ее ширины при $a = a_7$.
a_7 определим из условия касания круга $R1$ с границей полосы $y1(x)$:

$$R_2 + d_{12} = R_1 \quad (22)$$

$$a_7 = 22 - \sqrt{80} \approx 13.1 \quad (23)$$

(Рис. 21 при $a_7 = 22 - \sqrt{80} \approx 13.1$) .
Главное здесь то, что при $a \in [a_6, a_7]$ круг $R1$ находится в круге $R2$, а он с свою очередь в полосе D, и множество точек (x, y) удовлетворяет системе (1)-(3) и является кругом.

8) При дальнейшем увеличении параметра ширина полосы уменьшается и круг $R1$ начнет пересекаться с полосой (Рис. 22 при $a = 20$) до тех пор пока круг $R1$ не коснуться с внешней стороны полосы при $a = a_8$.
a_8 определим из условия касания круга $R1$ с границей полосы $y1(x)$ с внешней стороны

$$\delta_1 = \frac{Ax_1 + By_1 + C_1}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{\frac{4}{3}a - \frac{4}{3} + 3 - \frac{115}{3} + \frac{a}{3}}{\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 1}} = \frac{3}{5}\frac{5a - 110}{3} = \frac{5a - 110}{5} = R_1 = \sqrt{80} \approx 8.94. \quad (24)$$

$$a_8 = 22 + \sqrt{80} \approx 30.9 \quad (25)$$

Здесь при $a \in (a_7, a_8)$ круг $R1$ пересекает полосу D, и множество точек (x, y) удовлетворяет системе (1)-(3) , но не является кругом.

9) При $a = a_8 = 22 + \sqrt{80} \approx 30.9$
круг $R1$ касается внешней полосы D, круг $R1$ будет находиться внутри круга $R2$. При этом граница круга $R2$ пересекает границу полосы D , а круг $R1$ будет находиться вне полосы D. В этом случае множество точек (x, y), удовлетворяющей системе (1)-(3) состоит из одной точки, которую по

договоренности можно рассматривать, как круг с нулевым радиусом . Рис.23 при $a = a_8 = 22 + \sqrt{80} \approx 30.9$.

10) При дальнейшем увеличении параметра ширина полосы уменьшается, и круг $R1$ окажется вне полосы (Рис. 24 при $a = 40$) до тех пор, пока параметр не достигнет своего допустимого максимального значения $a_9 = 115$ (Рис. 25 при $a = 115$).

Таким образом, обобщая результаты 1)-10), получим ответ:

Если считать точку за круг с нулевым радиусом:

$a \in \{a_1\} \cup [a_3,\ a_5] \cup [a_6, a_7], \cup \{a_8\}$

или

$a \in \left\{-\frac{5}{3}\sqrt{80} - 40\right\} \cup [-20 + 8\sqrt{6},\ \frac{4}{3}] \cup [12, 22 - \sqrt{80}] \cup \{22 - \sqrt{80}\}$.

Если не считать точку за круг:

$a \in [a_3, a_4) \cup (a_4, a_5] \cup [a_6, a_7]$

или

$a \in [-20 + 8\sqrt{6}, 0) \cup (0, \frac{4}{3}] \cup [12, 22 - \sqrt{80}]$.

Оценка задачи ММ233 – 4 . Задача с рутинным решением, требующая анализа большого числа вариантов взаимного расположения трех тел.

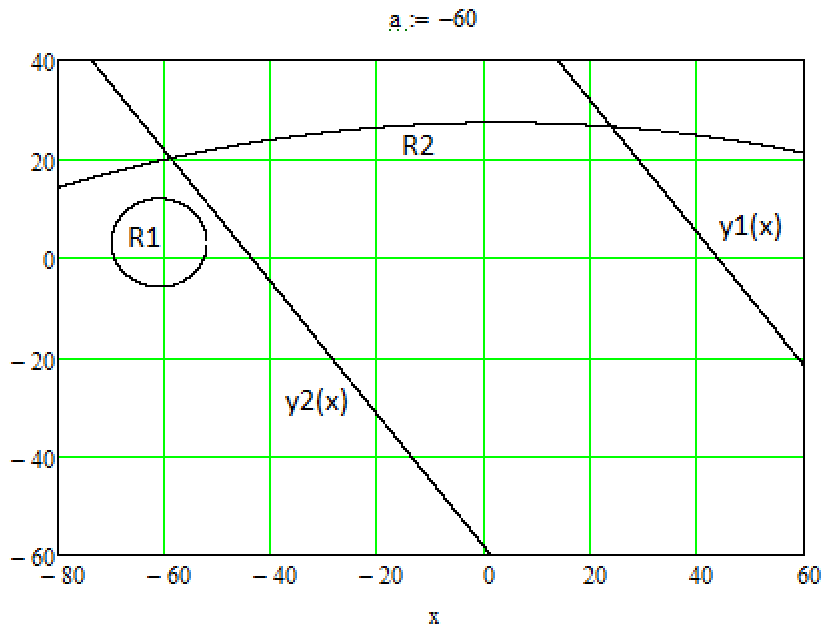


Рис. 3

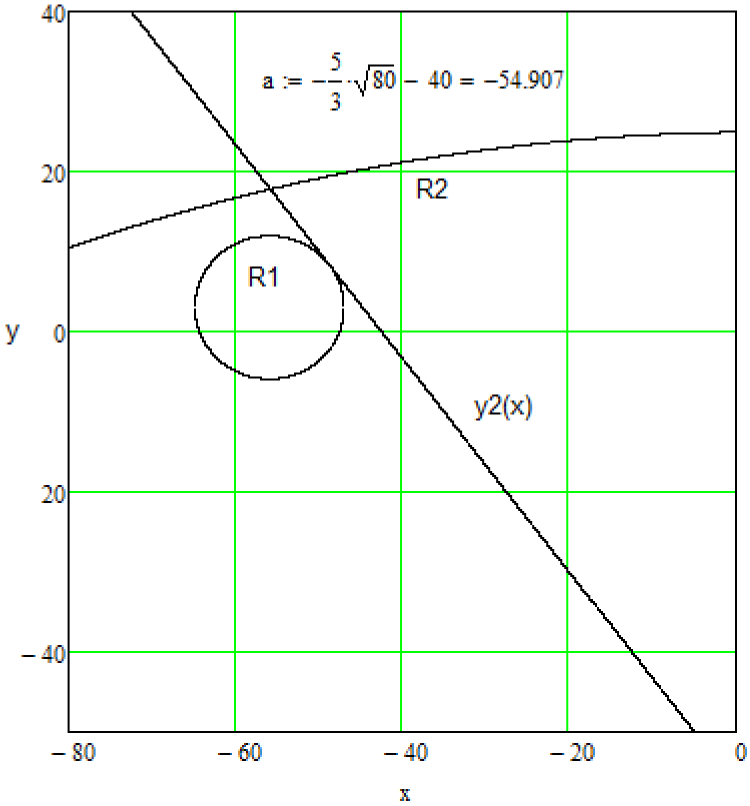


Рис. 4

$a := -50$

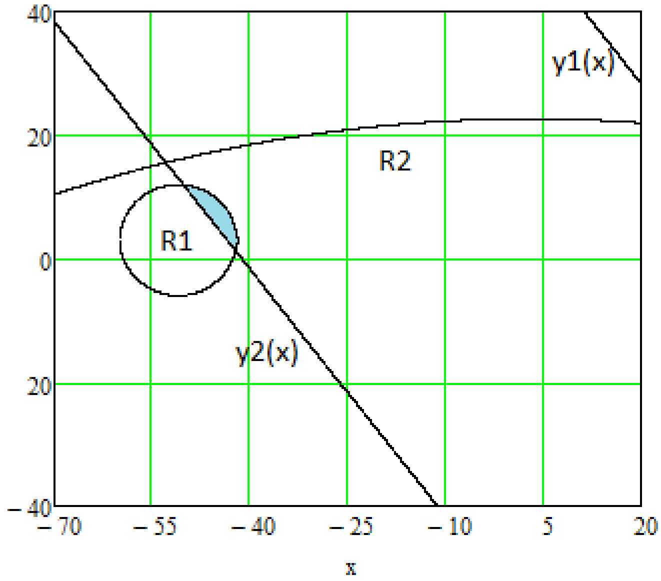


Рис. 5

$a := -20 - 8\cdot\sqrt{6}$

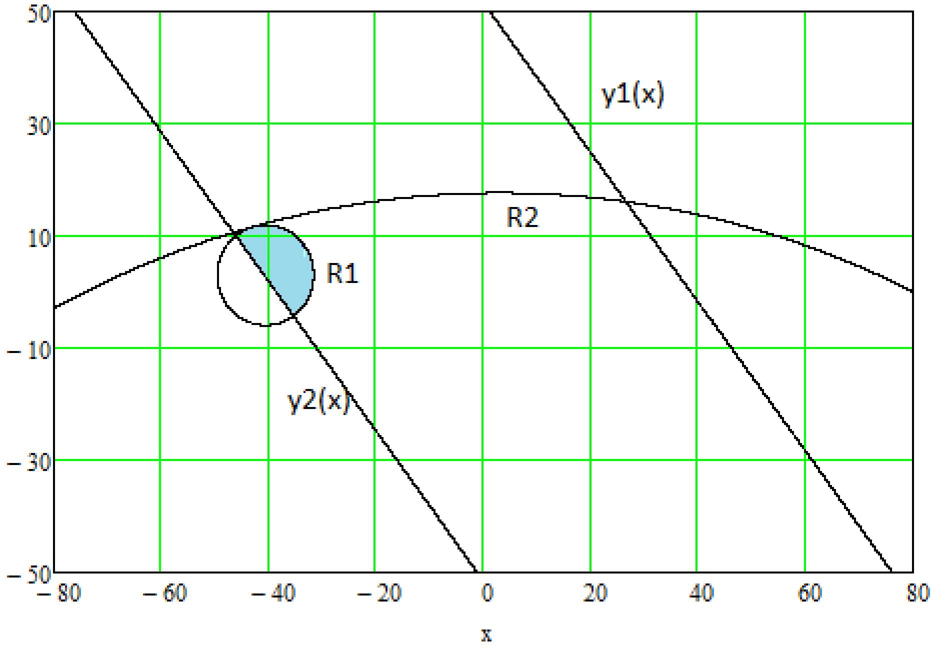


Рис. 6

$a := -30$

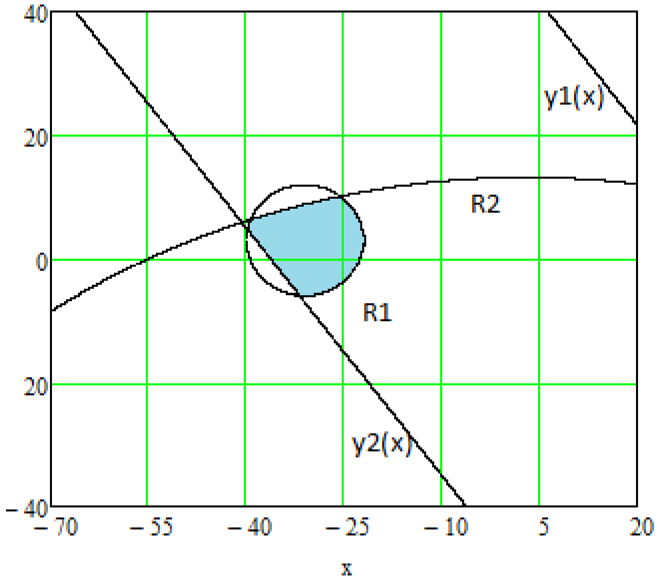
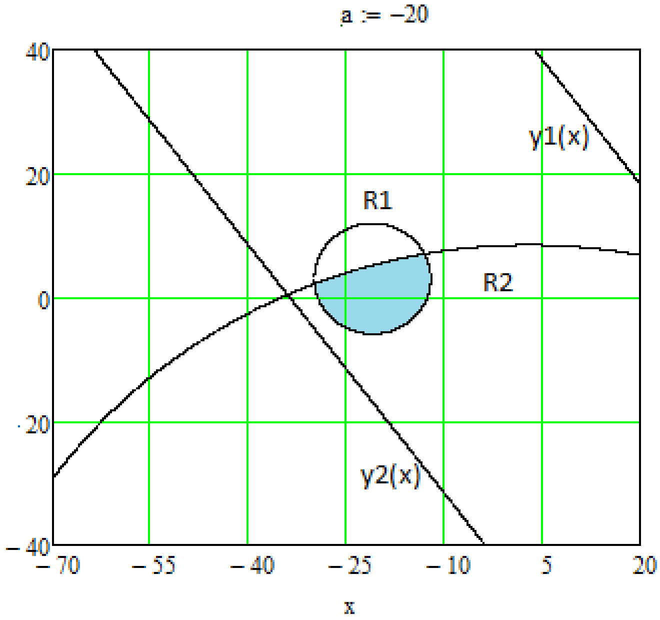
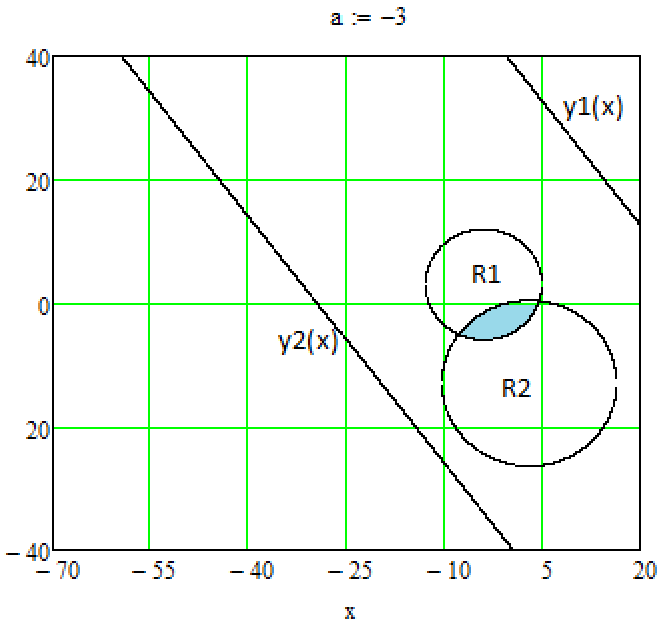


Рис. 7


a := −20
40
20
0
-20
−40
−70
−55
−40
−25
−10
5
20
x
y1(x)
R1
R2
y2(x)
Рис. 8


a := −3
40
20
0
20
−40
−70
−55
−40
−25
−10
5
20
x
y1(x)
R1
R2
y2(x)
Рис. 9

$a := -2$

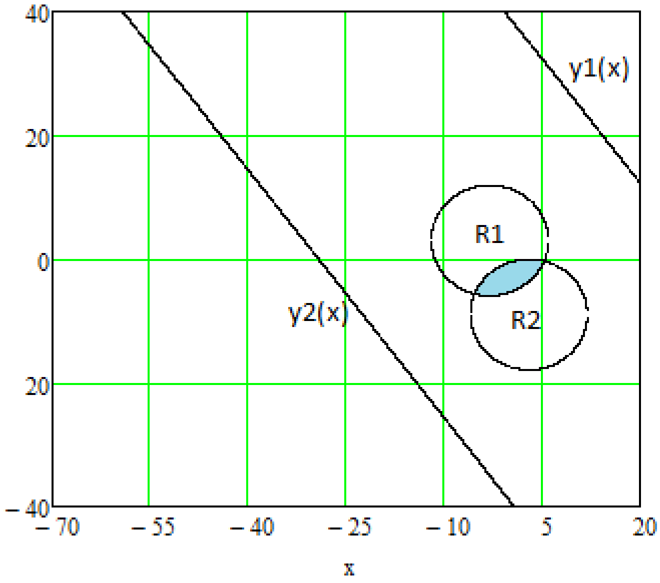


Рис.10

$a := -1$

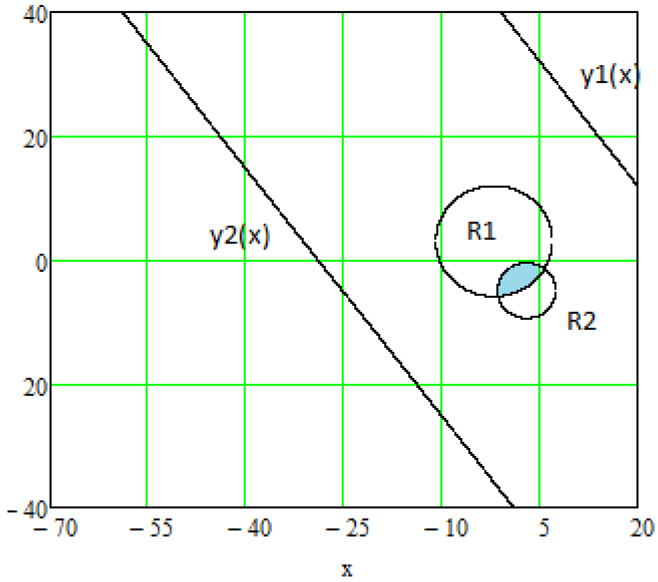


Рис. 11

$a = -20 + 8\cdot\sqrt{6}$

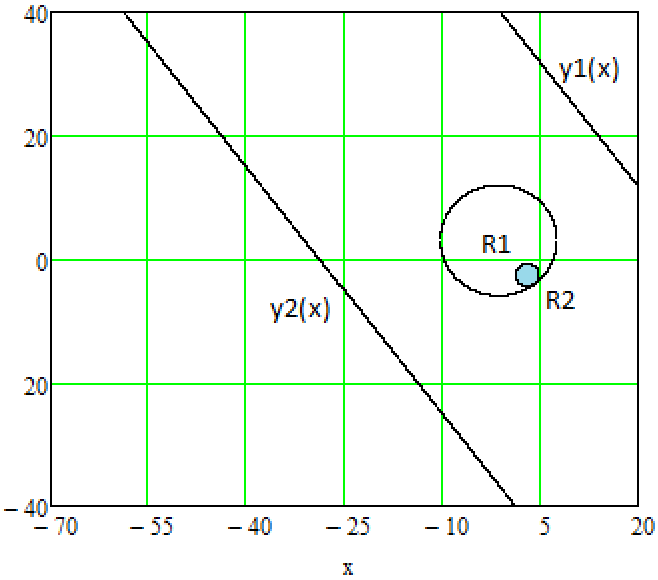


Рис. 12

$a := -0.2$

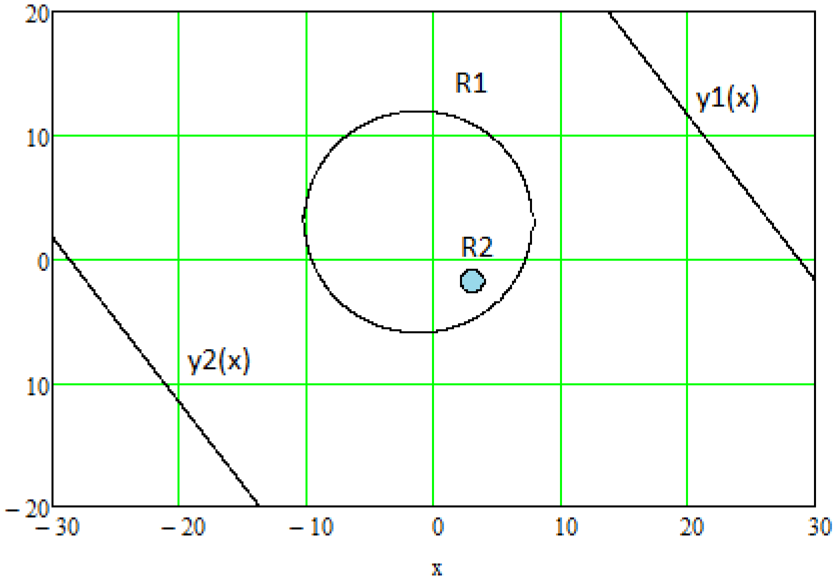


Рис. 13

$a := 0$

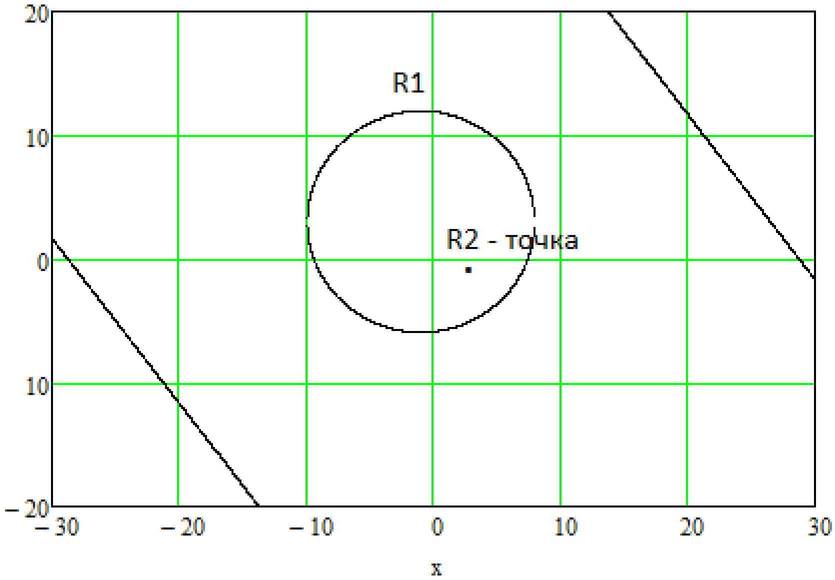


Рис. 14

$a := 1$

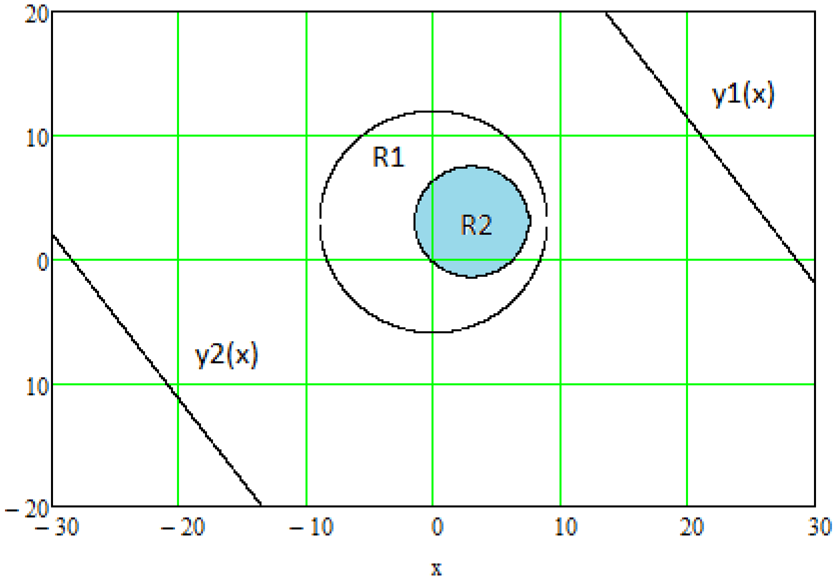


Рис.15

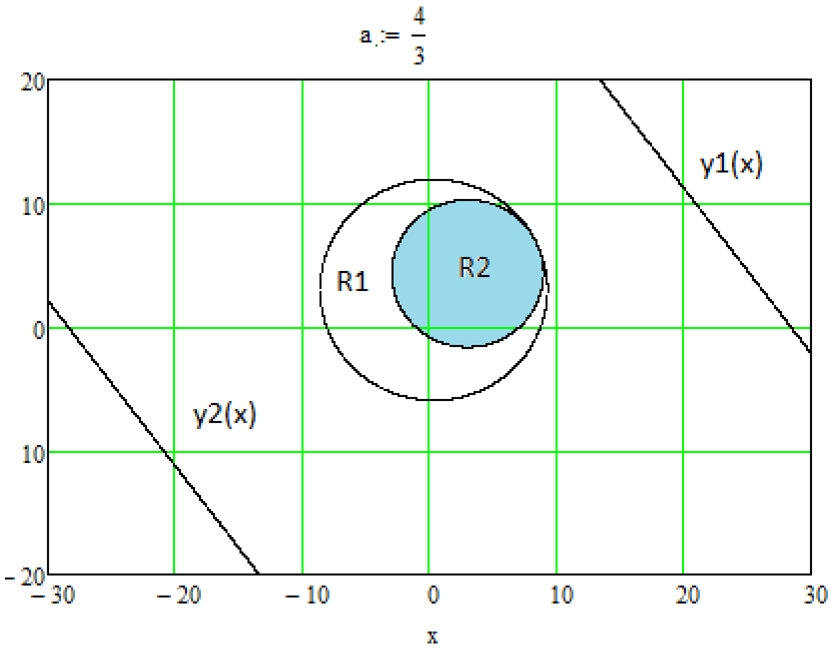

a := 4/3
20
10
0
10
−20
−30
−20
−10
0
10
20
30
x
y1(x)
y2(x)
R1
R2

Рис. 16

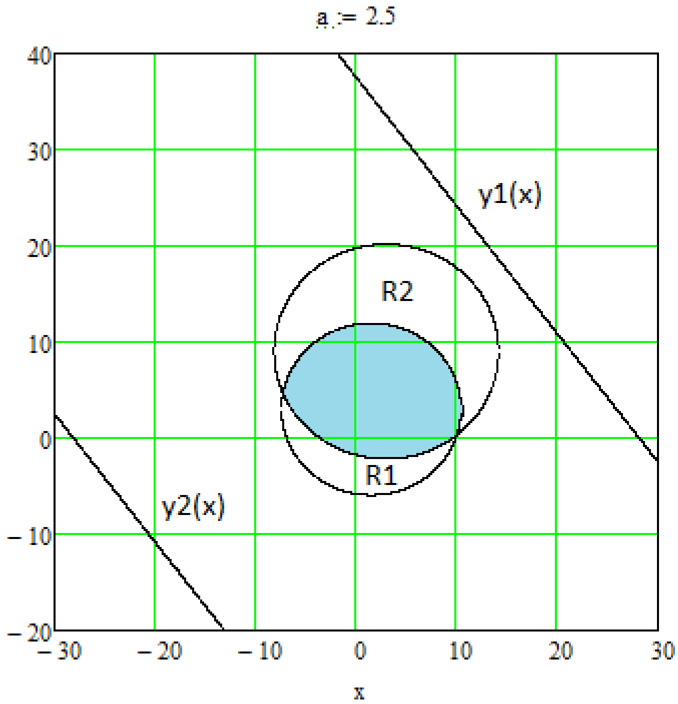

a := 2.5
40
30
20
10
0
−10
−20
−30
−20
−10
0
10
20
30
x
y1(x)
y2(x)
R1
R2

Рис. 17

a := 8

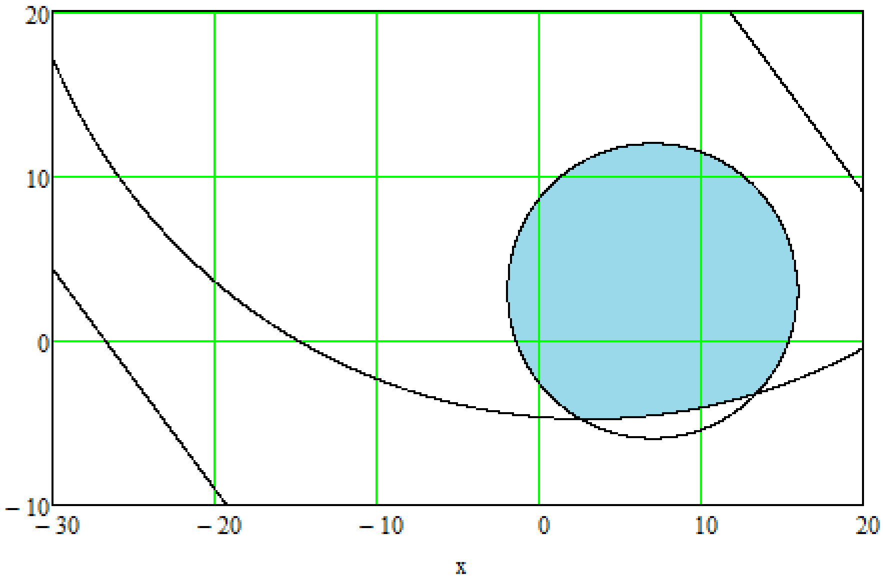


Рис. 18

a := 12

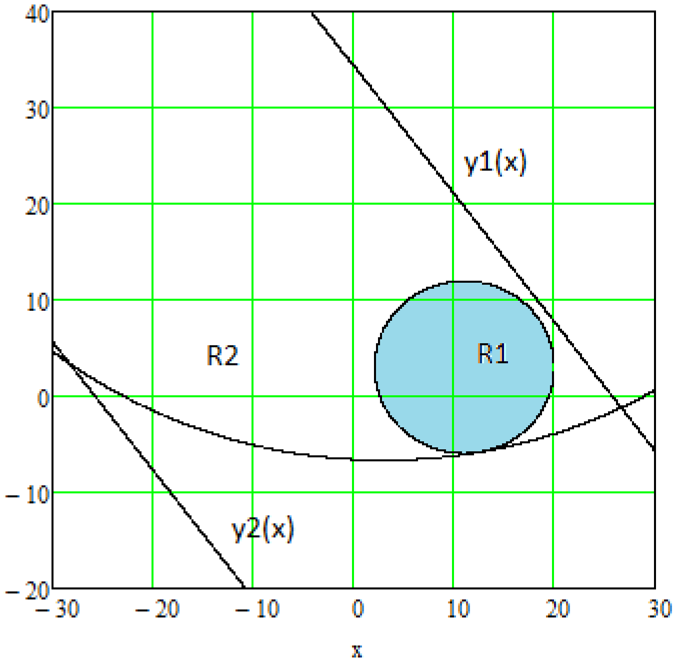


Рис. 19

$a := 12.7$

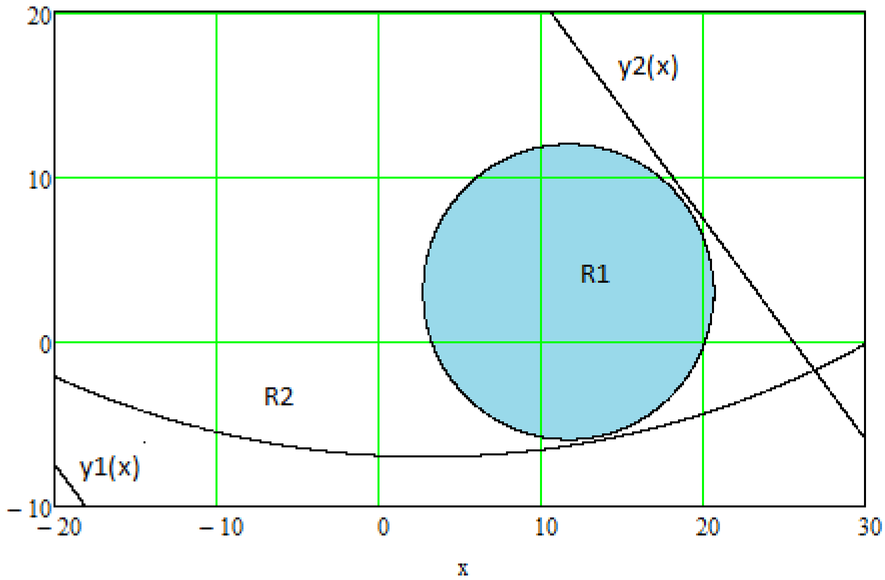


Рис. 20

$a := 22 - \sqrt{80}$

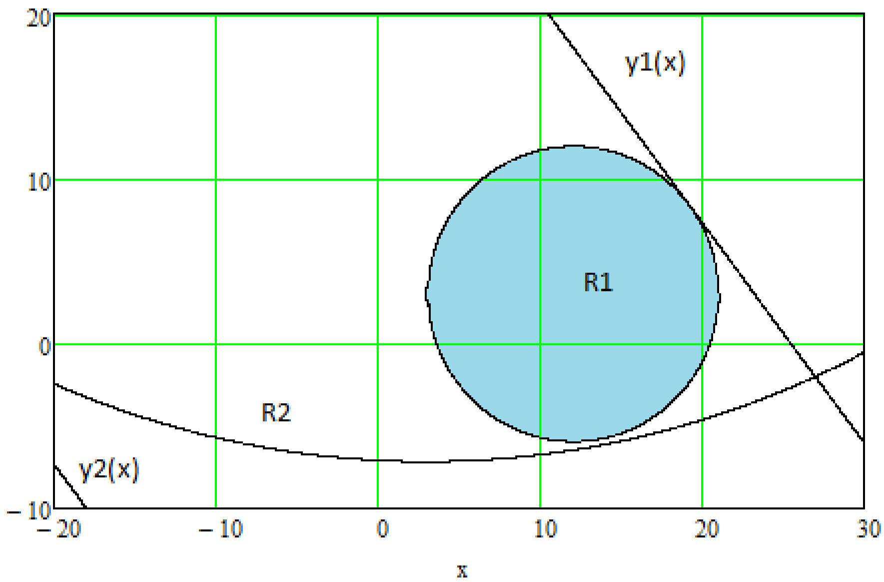


Рис. 21

$a := 20$

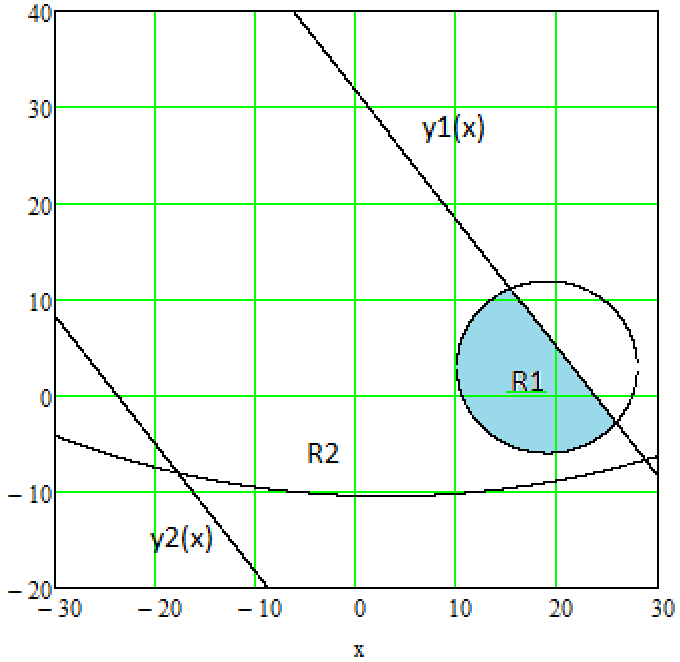


Рис. 22

$a := 22 + \sqrt{80}$

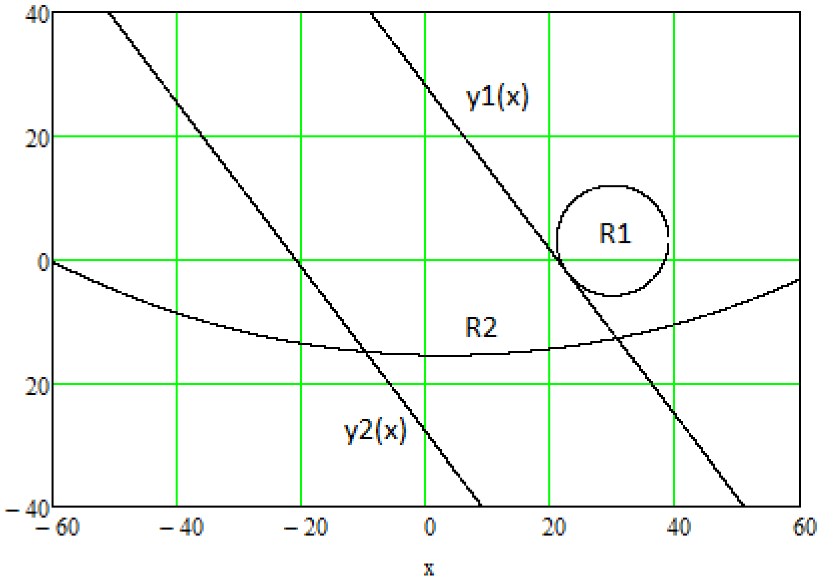


Рис. 23

$a := 40$

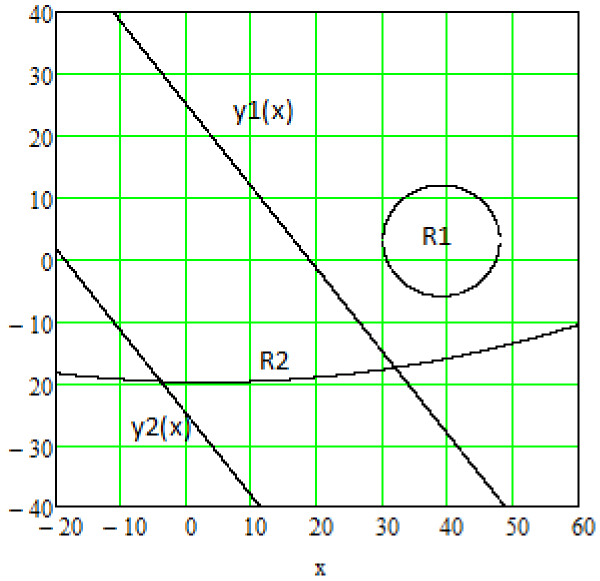


Рис. 24

$a := 115$

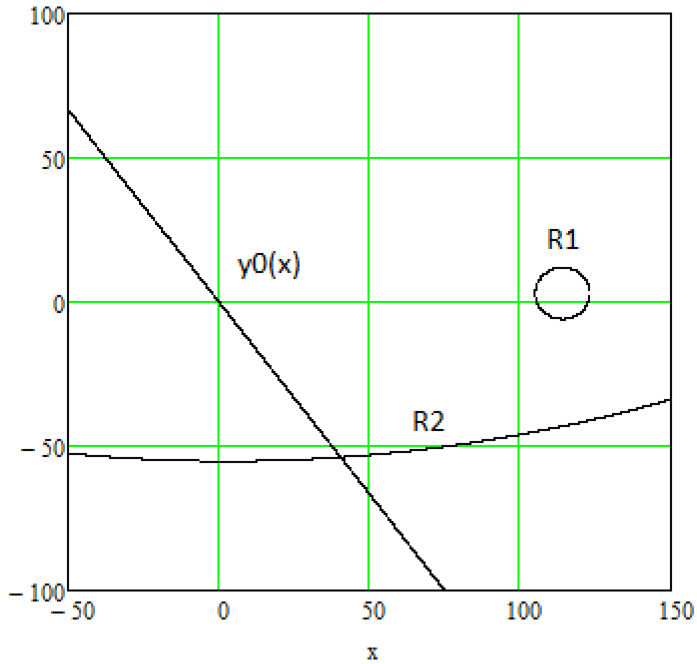


Рис. 25