MM236

Натуральные числа от 1 до $4n$ разбили на четыре группы по n чисел в каждой. Оказалось, что произведение всех чисел из первой группы равно произведениям всех чисел из второй и третьей групп. Найти наименьшую возможную сумму чисел четвертый группы.

Решение:

Из-за того, что произведение всех чисел из первой группы равно произведениям всех чисел из второй и третьей групп, следует, что в разложении произведения всех чисел из первой, второй и третьей групп по степеням простых чисел, показатели должны быть кратны трем. Тогда произведение в каждой из первых трех групп равняется корню кубическому из произведения всех чисел с первой по третьей группам. В четвертой группе могут находиться любые числа от 1 до $4n$, которые не попали в первые три. В первую очередь это будут числа, содержащие в качестве множителей простые числа, которые входят в разложение $(4n)!$ по степеням простых чисел, показатели которых некратны трем. Кроме того при разбиении по группам необходимо следить, чтобы числа не повторялись и в каждой группе было ровно по n чисел. Число 1, которое не является простым, должно находиться в одной из групп.

При $n = 1$ $4n = 4$ $(4n)! = 2^3 * 3$. Значит, в 4-ую группу должны попасть число 3. А в каждой группе будет по одному числу не равному друг другу. Следовательно, $n = 1$ не удовлетворяет условию задачи.

При $n = 2$ $4n = 8$ $(4n)! = 2^7 * 3^2 * 5 * 7$. Значит, в 4-ую группу должны попасть четыре числа 7,5,3,6. А в каждой группе должно быть по $n = 2$ чисел. Следовательно, $n = 2$ не удовлетворяет условию задачи.

При $n = 3$ $4n = 12$ $(4n)! = 2^{10} * 3^5 * 5^2 * 7 * 11$. Значит, в 4-ую группу должны попасть не меньше шести чисел с минимальной суммой 11,7,5,10,3,6. . Следовательно, $n = 3$ не удовлетворяет условию задачи. Почему с минимальной? Потому что возможны числа 11,7,5,10,9,2.

Аналогично при $n = 4 \div 9$ в четвертую группу должны попасть числа , число которых больше n.

n	$4n$	$(4n)!$	В четвертую группу должны попасть числа	Число чисел в 4-ой группе не меньше
4	16	$2^{15} * 3^6 * 5^3 * 7^2 * 11 * 13$	13,11,7,14,4	5
5	20	$2^{18} * 3^8 * 5^4 * 7^2 * 11 * 13 *$ $* 17 * 19$	19,17,13,11,7,14,10,3,6	9
6	24	$2^{22} * 3^{10} * 5^4 * 7^3 * 11^2 * 13 *$ $* 17 * 19 * 23$	23,19,17,13,11,22,15	7
7	28	$2^{25} * 3^{11} * 5^6 * 7^4 * 11^2 * 13^2 *$ $* 17 * 19 * 23$	23,19,17,13,26,11,22,21,4	9
8	32	$2^{31} * 3^{14} * 5^7 * 7^4 * 11^2 * 13^2 *$ $* 17 * 19 * 23 * 29 * 31$	31,29,23,19,17,13,26,11,22,21,30,2	12
9	36	$2^{34} * 3^{14} * 5^8 * 7^5 * 11^3 * 13^2 *$ $* 17^2 * 19^2 * 23 * 29 * 31$	31,29,23,19,17,34,13,26,35,28,30,12	12

При $n = 10$ $4n = 40$ $(4n)! = 2^{38} * 3^{18} * 5^9 * 7^7 * 11^3 * 13^3 * 17^2 * 19^2 * 23 * 29 * 31 * 37$. Значит, в 4-ую группу должны попасть не меньше десяти чисел 37,31,29,23,19,38,17,34,28,14 с минимальной суммой 37+31+29+23+19+38+17+34+28+14=270 и произведением $37*31*29*23*19*38*17*34*28*14=2^5*7^2*17^2*19^2*23*29*31*37$. Тогда произведение чисел в первых трех группах равняется $\frac{40!}{2^5*7^2*17^2*19^2*23*29*31*37}=\frac{2^{38}*3^{18}*5^9*7^7*11^3*13^3*17^2*19^2*23*29*31*37}{2^5*7^2*17^2*19^2*23*29*31*37}=$

$=2^{33}*3^{18}*5^9*7^3*11^3*13^3$. А в каждой из тех первых групп произведения должны быть равны $\sqrt[3]{2^{33}*3^{18}*5^9*7^3*11^3*13^3}=2^{11}*3^6*5^3*7*11*13$, число чисел по 10 и все числа в четырех группах должны быть разными. Все эти условия будут выполнены, если в первой группе будут числа 35,27,24,18,16,13,11,10,5,4; во второй – 39,33,32,30,21,20,15,12,2,1; в третьей 40,36,26,25,22,9,8,7,6,3.

Следовательно, $n=10$ удовлетворяет условию задачи.

Осталось доказать, что меньше суммы, чем 270, быть не может при $n>10$.

Оценку суммы будем производить по числам , которые должны по крайне мере находится в четвертой группе или их меньше.

n	$4n$	Числа , которые должны по крайне мере находится в четвертой группе или меньше их.	Их сумма.
от 11 до 12	от 44 до 48	43,41,37,31,29,23,19,38,17	278
от 13 до 17	от 52 до 68	47,43,41,37,31,29,23,46	297
от 18 до 25	от 72 до 100	71,67,61,59,53	311
от 26 до 67	от 104 до 268	103,101,97	301
от 68 до 135	от 272 до 540	271	271

Далее для $n>135$ между $2n$ и $4n$ по постулату Бертрана, который был доказан Чебышевым, существует простое число p, такое, что $2n<p<4n$. Т.е. оно больше 270 и обязано принадлежать четвертой группе. Т.о. минимальная сумма чисел в четвертой группе равна 270.

Замечание: существуют более сильные утверждения аналогичные постулату Бертрана (менее известные), например, из теоремы о распределении простых чисел следует, что для любого $\varepsilon>0$ существует $n_0>0$ такое, что для любых $n>n_0$ существует простое число p, удовлетворяющее $n<p<(1+\varepsilon)n$. Более того, для фиксированного ε количество простых чисел в этом интервале стремиться к бесконечности с ростом n.

Возможно, это ускорит доказательство единственности минимальной суммы чисел в четвертой группе.

Ответ: 270.

Оценка задачи ММ234 – 5 .