ММ249

**Конкурсная задача ММ249**

Пусть K – натуральное число и A – некоторая перестановка 2020-элементного множества. Может ли уравнение xK = A иметь ровно 2020 решений?

В дальнейшем перестановка, которая имеет в точности один единственный цикл будем называть ЦИКЛИЧЕСКИМ.

А циклом будем называть любой цикл в точности с одним единственным циклом, то есть тривиальный случай, когда элемент множества отображается на самом себе (фиксированный длиной 1) тоже будет называться циклом. И естественно все цикли циклические.

1.     Если мы имеем некую циклическую перестановку "X" с единственным циклом и длиной n\*k, значит имеем

 x1->x2 -> x3 ->…-> x{n\*k} в этом случае в перестановке X^(k\*q) где НОД{q;n}=1, количество циклов будет k и каждый из них будет иметь длину цикла "n" и будет выглядеть:

x{t} -> x{t+k} -> x{t+2k} ->…-> x{t+(n-1)\*k}

Где 0<t<(k+1)

Значит, когда имеем некую циклическую перестановку

X: x1 -> x2 -> … -> x{n} и некое натуральное число “K”,

То количество циклов после возведения в степень, внутри X^K становится НОД{n;K}.

А длина у всех новых циклов по отдельности внутри X^k будут равны и L= N/НОД{N;K}

Введём обозначения, для тех параметров, которые имеют значения для выявления количество решений в уравнении X^K=A

A; K; S\_AK; Li; Mi; Ai; Ki; Si; Xi={Xir}; Kij; Lij; Mirj; {Mirj}; Xirq; Xir={Xirq}; Sir.   Нумерации: i; j; r; q.

S\_AK это количество всех решений уравнений X^K=A для некой перестановки "A" и для некого натурального числа "K"

Li это длина некоторого цикла внутри перестановки "A".

Ai это перестановка, которая включает только те и все те циклы внутри перестановки "A", у которых длина Li. То есть Ai перестановка для множества элементов орбит этих циклов с тем же отображением что и в "A".

Mi это количество тех циклов перестановки “A”, у которых длина Li, (то есть количество циклов в "Ai")

Ki это натуральное число которое имеет те и только те простые делители которые имеет НОД{K;Li}, но степень каждого простого делителя из НОД{K; Li} ровно тот который имеет для этого простого делителя "K", то есть НОД{K/Ki;Li}=1, так как после деления на Ki, в "K" не остаётся не одного простого делителя которое имеется в Li.

Si это количество всех решений X^K=Ai

{Kij} это множество делителей натурального числа (K/Ki) для конкретного {Li}, которые меньше или равно (Mi/Ki).              
То есть Kij=<(Mi/Ki).  А {{Kij}} это множества всех подмножеств {Kij}.

Lij это длина некого цикла которая может встретится в решений X^K=Ai и Lij=Ki\*Kij\*Li

Mirj это количество всех циклов длиной Lij которое может встретится в Xirq, и {Mirj} для каждого Xirq одинаковое.  
В Xirq может быть, как и один единственный Lij у которого Mirj>0, так и несколько, может разных, может и одинаковых.

Xir={Xirq} это некая подмножества множество решений уравнений X^K=Ai, который определяет множество {Mirj}, то есть у конкретного множества Xir={Xirq} имеется один единственный {Mirj} и естественно единственный вид S{1\_max(j)}{Mirj\*Lij}=Mi\*Li,  
(то есть у всех Xirq для конкретного "i" и "r" независимо от "q" это множество одинаковое) ,  
а Xirq это некое конкретное решение уравнений X^K=Ai  у которого {Mirj},  
то есть в этих решениях количество циклов длиной Lij равняется Mirj (а сам Lij=Ki\*Kij\*Li )

Sir это размер множества {Xirq}, то есть количества всех Xirq в множестве {Xirq}         ( Sir=max(q) для любых конкретных "i" и "r")

В случае, когда перестановка Xirq не циклический, то есть имеет не единственный цикл, а несколько, для этого случая обозначим через Lij длину некого цикла внутри Xirq, а через Mirj то какое количество раз в перестановке X встречаются циклы длиной Lij, то в этом случае количество циклов после возведения в степень, то есть в (Xirq)^K можно представить формулой

S{(Xirq)^K}=S{j=1\_max(j)}{Mirj\*Lij} где буква "S" обозначает сумму.

2.  Если максимальное количество одинаковой длины циклов внутри некой перестановки “A" меньше, чем минимальный простой делитель K (то есть max(Mi)<min(d\_k) где d\_K простой делитель K), и НОД{K;Li}=1 для любого цикла из перестановки “A”, то  получаем тривиальный случай, когда Ki=Kij=1 для всех “Ai”, то есть уравнение   X^K=A  будет иметь одно единственное решение.

А если в перестановке "A" хотя бы один Mi не будет делится без остатка на Ki, то X^K=A не будет иметь решение.

Значит, из 1. и 2. вытекает что, чтобы некая перестановка Xirq в степени "K" равнялся перестановке "A", для этого для каждой группы орбит {Li;Mi} внутри перестановки "A", должен существовать соответствующая Группа циклов внутри перестановки "X" из которых после возведения в степень получится Группа {Li;Mi}, то есть

1. Это Группа в перестановке X должен состоять только теми, и всеми теми элементами, которые входят в соответствующую группу перестановки "A".

2. Каждый цикл в группе Xir является неким циклическим отображением некого множества орбит из группы Ai, и количества циклов в этом множестве может равняться только Ki\*Kij где Ki постоянная величина для этой группы, а Kij могут быть разными.

3. Каждый цикл в группе Xir определяется параметрами Ki, Kij, Li, так как длина каждого цикла в этой группе Xi перестановки X, должен иметь Lij=Ki\*Kij\*Li для некоторого Kij. Обозначим количества циклов в группе Xir, (Xirявляется подмножеством Xi) у которых Lij совпадает через Mirj

Естественно, сумма всех {Mirj\*Lij} в этой в группе Xir равняется Mi\*Li.

4. В каждом решений уравнений X^K=A, каждый цикл входит в некой группе Xir и является неким отображением орбит соответствующего множество циклов из Группы Ai перестановки "A" (группа Ai состоит из циклов равной длины циклов Li, а в группе Xi длина циклов Lij= Ki\*Kij\*Li и могут различаться только из за Kij. )

 5. Если в некем перестановке Ai имеется (Ki)\*(Kij) одинаковой длины Li циклов, то количество циклических перестановок "X" длиной цикла (Ki)\*(Kij)\*(Li) которые после возведения в степень "Ki\*Kij" дадут перестановку "Ai", определённых на множество (Ki)\*(Kij)\*(Li), количество S(циклических)=[(Ki\*Kij-1)!]\*(Li)^(Ki\*Kij-1)

6. Количество множеств длиной Ki\*Kij в множестве Mi,

S{Mi;Ki\*Kij} = (Mi)!/[(Ki\*Kij)!\*(Mi-Ki\*Kij)!]

А если количество множеств длиной именно Ki\*Kij в множестве Mi равняется Mirj, тогда общее количество таких множеств

S{Mi; Mirj; Ki\*Kirj}=Mi!/{[[(Ki\*Kij)!]^Mirj]\*[(Mirj)!]\*[(Mi-Mirj\*Ki\*Kij)!]}

А если вся множества Mi заполнено разными такими {Mirj; Ki\*Kij} то так как

[Mi-S{1\_max(j)}{Mirj\*Ki\*Kij}]=0 получим

S{Mi; Mirj; Ki\*Kirj}=Mi!/П{1\_max(j)}{[(Ki\*Kij)^Mirj]\*[(Mirj)!]}

7. Тогда общая формула для Sir, когда количество циклов длиной Ki\*Kij\*Li равняется Mirj, так как в числителе будет [(Ki\*Kij-1)!]^Mirj. а в знаменателе [(Ki\*Kij)!]^Mirj то получается

Sir=(Mi)!\*[(Ki\*Kij-1)!^Mirj]\*Li^S{1\_max(j)}{Mirj\*(Ki\*Kij-1)}/П{1\_max(j)}{[(Ki\*Kij)!^Mirj]\*[(Mirj)!]}

Sir=(Mi)!\*Li^[Mi-S{1\_max(j)}{Mirj}/{[(Ki)^S{1\_max(j)}{Mirj}\*П{1\_max(j)}{[(Kij)^(Mirj)]\*[(Mirj)!]}

И Si=S{1\_max(r)}(Sir); S\_AK=П{1\_max(i)}{Si}

Где S{1\_max(j)}(Mirj) это сумма всех Mirj в этой группе Xir, которых определяет Xir, то есть группа решений уравнения X^K=Ai номером "r" (то есть группа Xir={Xirq})

П(1\_max(j)}{[(Kij)^(Mirj)]\*[(Mirj)!] это произведение всех [(Mirj)!]\*[(Kij)^(Mirj)] соответствующих этой группе Xir.

“Sir” это количество всех решений уравнений X^K=Ai входящих в группе “Xir”, для любого конкретного(одного) “Ai”; “K” и “r”.

“Si” это количество всех решении уравнений X^K=Ai для любого конкретного (одного) “Ai” и “K”

“S\_AK” это количество всех решений уравнении X^K=A для любого конкретного(одного) “A” и “K”

Таким образом получили общую формулу для вычисления количества решений.

Теперь вычислим всех типов перестановки "A" и соответствующих "K", при которых X^K=A имеет ровно 2020 решении.

Так как среди делителей 2020, Si может принимать все чётные значения и только 505 среди нечётных (покажем потом),

а Si=505 только в том случае если "K" нечётное, и не имеет простых делителей меньше или равно 7 кроме 5 (то есть "K" на 5 должен делится, а на 2;3;7 не должен делится, Kij=5; Li=1; Ki=1; Mi=7; :=>: Si=505), но в этом случае мы в дополнений к 505 для S=2020 должны получить ещё и "4" (S=2020=4\*505), а "4" можем получить только по чётным "K". Значит если мы получим "4", тогда не сможем получить "505", и получаем противоречие.

Остаётся только что все Si должны быть чётными, но так как у 2020 степень чётности "2", [2020=(2^2)\*505] :=>: количество множителей может быть максимум два. А таких только три варианта: 2020; 2\*1010; 10\*202.

 S=S1=2020 и {S1=2; S2=1010; S=S1\*S2=2\*1010=2020} из за ограниченности изначального множества элементов, имеют по одному варианту основной "конфигурации" перестановки "A" (для которого уравнение X^K=A имеет ровно 2020 решений)

А (S1=10; S2=202; S=S1\*S2=10\*202=2020) имеет 12 разных основных "конфигурации" для "A"

И во всех случаях, среди делителей "K" всё количество решении даёт его единственный простой делитель "2". Все остальные делители просто не участвуют в процессе. (Главное чтоб не мешали :) )

Для "A" при этом (при N=2020) имеется всего 1+1+12=14 разных конфигурации (считается конфигурации параметров Ai, то есть не сами перестановки, а только {Li;Mi} тех Ai которые и дают множество решении) тех Ai которые дают всё количество решении, и в 13 вариантах по отдельности, в количество решении участвуют по две Ai, а в одном участвует всего один Ai.

И это:

1) {S=S1=2020} для N=2020 имеет одно единственное решение,

{L1=673; M1=3; S=S1=(3!/3!)\*(L1)^(3-3)+[(3!/(2^1)]\*(L1)^(3-2)=1+3\*(L1)=1+3\*673=2020}

2) для S=S1\*S2=2\*1010=2020 тоже один единственный вариант для N=2020 и это:

{L1=1; M1=2; S1=1+L1=2; L2=1009; M2=2; S2=1+L2=1010; S=S1\*S2=2\*1010=2020}

3) {S1=202; S2=10; S=S1\*S2=202\*10=2020} имеет 12 разных решений, так как S1=202 :=>: (Xi)^2=Ai имеет 202 решений в трёх случаях. И это для 202:

{L1=202; M1=2; S1=[2!/(2^1)]\*L^(2-1)=L=202}

{L1=201; M1=2; S1=(2!/2!)\*L^(1-1)+[2!/(2^1)]\*L^(2-1)=1+L=202}

 {L1=67; M1=3; S1=(3!/3!)\*L^(3-3)+[3!/(2^1)]\*L^(3-2)=1+3\*L=1+3\*67=202}

Для 10 возможностей "4", и это:

{L2=10; M2=2; S2=[2!/(2^1)]\*L^(2-1)=L=10}

{L2=9; M2=2; S2=[2!/2!]\*L^(2-2)+[2!/(2^1)]\*L^(2-1)=1+L=1+9=10}

{L2=3; M2=3; S2=[3!/3!]\*L^(3-3)+[3!/(2^1)]\*L^(3-2)=1+3L=1+3\*3=10}

{L2=1; M2=4; S2=[4!/4!]\*L^(4-4)+[4!/(2\*2!)]\*L^(4-3)+[4!/(2\*(2^2))]\*L^(4-2)=1+6L+3\*(L^2)=1+6+3=10}

В итоге для S=202\*10 получается 3\*4=12 вариантов

В итоге для N=2020 получается 14 вариантов основных "конфигурации" перестановки "A", для которого X^K=A имеет

ровно 2020 решений, и при этом в каждом случае K=2\*w. (При этом от "w" требуется только, чтобы он не мешал)

Вот и все 14 основных "конфигурации" перестановки "A":

1.   A1={L1=673; M1=3} S=S1=1+3\*L=1+3\*673=2020}.  S=S1=2020.  N=3\*673+1(фикс)=2019+1(фикс)=2020

2.   A1={L1=1; M1=2; S1=2}.   A2={L2=1009;M2=2; S2=1010}.

S=S1\*S2=2\*1010=2020  N=2\*1+2\*1009=2020

3.   A1={L1=202; M1=2; S1=202}. A2={L2=10; M2=2; S2=10}.   S=S1\*S2=202\*10=2020. N=2\*202+2\*10+n{1}=424+n{1}

4.   A1={L1=202; M1=2; S1=202}. A2={L2=9; M2=2; S2=10}.     S=S1\*S2=202\*10=2020. N=2\*202+2\*9+n{2}=422+n{2}

5.   A1={L1=202; M1=2; S1=202}. A2={L2=3; M2=3; S2=10}.     S=S1\*S2=202\*10=2020. N=2\*202+3\*3+n{3}=413+n{3}

6.   A1={L1=202; M1=2; S1=202}. A2={L2=1; M2=4; S2=10}.     S=S1\*S2=202\*10=2020. N=2\*202+4\*1+n{4}=408+n{4}

7.   A1={L1=201; M1=2; S1=202}. A2={L2=10; M2=2; S2=10}.   S=S1\*S2=202\*10=2020. N=2\*201+2\*10+n{5}=422+n{5}

8.   A1={L1=201; M1=2; S1=202}. A2={L2=9; M2=2; S2=10}.     S=S1\*S2=202\*10=2020. N=2\*201+2\*9+n{6}=420+n{6}

9.   A1={L1=201; M1=2; S1=202}. A2={L2=3; M2=3; S2=10}.     S=S1\*S2=202\*10=2020. N=2\*201+3\*3+n{7}=411+n{7}

10. A1={L1=201; M1=2; S1=202}. A2={L2=1; M2=4; S2=10}.     S=S1\*S2=202\*10=2020. N=2\*201+4\*1+n{8}=411+n{8}

11. A1={L1=67; M1=3; S1=202}.   A2={L2=10; M2=2; S2=10}.   S=S1\*S2=202\*10=2020. N=3\*67+2\*10+n{9}=221+n{9}

12. A1={L1=67; M1=3; S1=202}.  A2={L2=9; M2=2; S2=10}.      S=S1\*S2=202\*10=2020. N=3\*67+2\*9+n{10}=219+n{10}

13. A1={L1=67; M1=3; S1=202}. A2={L2=3; M2=3; S2=10}.       S=S1\*S2=202\*10=2020. N=3\*67+3\*3+n{11}=210+n{11}

14. A1={L1=67; M1=3; S1=202}. A2={L2=1; M2=4; S2=10}.       S=S1\*S2=202\*10=2020. N=3\*67+4\*1+n{12}=205+n{12}

Длина всех остальных циклов перестановки "A" нечётные и единственные по длине, то есть попарно разные по длине с любим циклом перестановки "A". (И легко убедится, что такое представление возможно во всех 14 случаях).

Если "K" представить как K=2\*w, то обязательное и достаточное условие для K это:

1. НОД{w;Li}=1 для любой длины цикла перестановки "A", и

2. Минимальный нечётный простой делитель "w" больше максимального размера "Ai", то есть максимального количества одинаковой длины циклов в перестановке "A" (то есть max{Mi}), и если max{Mi}>3 в этом случае не допустимо и "2".

В случае, когда K=2 (значит w=1) единственным обязательным и достаточным условием (кроме перечисленных выше 14 разных вариантов конфигурации Ai) останется то что все остальные циклы были нечётными по длине и попарно разными со всеми циклами перестановки "A". (То есть и с теми которые дают множество решений)

Кроме этого, выяснили что минимальное количество элементов множество, чтобы X^K=A имело ровно 2020 решений, это

N=205. В общем чтобы X^K=A имел ровно 2020 решений, возможно, когда N=205; 208; и все N>209.

А количество всех основных конфигурации "A", для которых X^K=A имеет ровно 2020 решений, при достаточном количестве элементов, S=19, 14 те которые показали, 3 добавляется для A1=2; A2=1010 и 2 добавляется A1=2020.

Так как Si=2 получается двумя способами

{Li=1; Mi=2; Si=(2!/2!)\*(Li)^(2-2)+[2!/(2^1)]\*(Li)^(2-1)=1+Li=1+1=2}

 и {Li=2; Mi=2; Si=[2!/(2^1)]\*(Li)^(2-1)=Li=2}

И Si=1010 получается тоже двумя способами

{Li=1009; Mi=2; Si=[2!/2!]\*(Li)^(2-2)+[2!/(2^1)]\*(Li)^(2-1)=1+Li=1+1009=1010}.

и  {Li=1010; Mi=2; Si=[2!/(2^1)]\*(Li)^(2-1)=Li=1010}

Вариантов для S=S1\*S2=2\*1010 получается 2\*2=4, но так как один вариант уже использовали добавляется 3.

И ещё "2" варианта добавляется для Si=2020.

И это {L=2019; M=2; S=1+L=2020} и {L=2020; M=2; S=L=2020}

Всего, когда размер основного множество достаточное, для того чтобы X^K=A имело ровно 2020 решений, имеется

19 вариантов основной "конфигураций” перестановки "A", и во всех случаях K=2\*w и ограничения на "w" и на длину остальных циклов перестановки "A" те же что и до этого писал.

А когда размер основного множество элементов=2020, в этом случае получается всего 14 вариантов, и все варианты были представлены.

А теперь не остановимся на этом и найдём все возможные количество решений для уравнения X^K=A до 2050,

Чётные получаются все, так как когда Ki=1 и Mi=3 в этом случае S=1+L, где L может принимать любую нечётное значение. И когда Ki=2 и Mi=2 получаем S=L, где L может принимать любое чётное значение. В общем чётные значения можем получать многими разными способами, а вот что касается нечётных, то тут имеется серьёзное ограничения,

И имеется только конкретный набор чисел. Начинаем:

K=3; Ki=1

Mi=3. =>. Si=1+2\*L^2.

4. =>. 1+8\*L^2.

5. =>. 1+20\*L^2.

6. =>. 1+40\*L^2+40\*L^4.

7. =>. 1+70\*L^2+280\*L^4.

8. =>. 1+7\*16\*L^2+70\*16\*L^4.

L=1. =>. 3;9;21;81;351;1233.

2. =>. 9;33;81;801.

4. =>. 33;129;321.

5. =>. 51;201;501.

7. =>. 99;393;981.

8. =>. 129;513;1281.

10. =>. 201;801;2001.

11. =>. 243;969;   13. =>. 339;1353.  14)=>. 393;1569.  16)=>513;2049.  17)=>579.  19)=>723.  20)=>.801.  22)=>.969.

 23)=>.1053.  25)=>.1251.  26)=>.1353. 28)=>.1569.  29)=>.1683.  31)=>.1923.  32)=>.2049.

{L1=1; L2=2}=> 3\*9=27; 21\*9=189; 9\*33=297; 21\*33=693; 9\*81=729; 21\*81=1701;

{L1=1; L2=4}=> 3\*129=387; 3\*321=963; 9\*129=1161;

{L1=2; L2=4}=> 33\*33=1089;

{L1=1; L2=5}=> 3\*51=153; 9\*51=459; 3\*201=603; 21\*51=1071; 3\*501=1503; 9\*201=1809;

{L1=2; L2=5}=> 33\*51=1683;

{L1=1; L2=7}=> 9\*99=891; 3\*393=1179;

{L1=1; L2=8}=> 3\*513=1539

{L1=1; L2=13}=> 3\*339=1017;

{L1=1; L2=17}=> 3\*579=1737;

K=5;  Ki=1.

Mi=5. =>. 1+24\*L^4.

6. =>. 1+144\*L^4.

7. =>. 1+504\*L^4.

8. =>. 1+1344\*L^4.

L=1. =>. 25;145;505;1345.

L=2. =>. 385.

K=7;  Ki=1.

Mi=7;  L=1;  S=1+720\*L^6=721.

K=15; Ki=1;

L=1; Mi=5.=>.1+20+24=45;  Mi=6.=>.1+80+144=225.   Mi=7.=>.1+350+504=855.

L=2; Mi=5.=>.1+80+384=465.

{L1=1; M1=5}{L2=2;N2=3}.=>.S=9\*45=405

{L1=1; M1=6; L2=2; N2=3}.=>.S=(1+2\*2^2)\*(1+80+144)=9\*225=2025.

{L1=1; M1=3; L2=2; N2=5}.=>.S=(1+2\*1)\*(1+80+384)=3\*465=1395.

K=21.  Ki=1.

L1=1;  M1=7.=>.S=1+350+720=1071.

K=35.  Ki=1.

L1=1.  M1=7.=>.1+504+720=1225

{K=3\*5\*7;  Ki=1; L1=1; M1=7}.=>.S=1+350+504+720=1575.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Mi→ L{i} ↓ | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | K=3  K{i}=1 |
| 1 | 3 | 9 | 21 | 81 | 351 | 1233 |  |
| 2 | 9 | 33 | 81 | 801 |  |  |  |
| 4 | 33 | 129 | 321 |  |  |  |  |
| 5 | 51 | 201 | 501 |  |  |  |  |
| 7 | 99 | 393 | 981 |  |  |  |  |
| 8 | 129 | 513 | 1281 |  |  |  |  |
| 10 | 201 | 801 | 2001 |  |  |  |  |
| 11 | 243 | 969 |  |  |  |  |  |
| 13 | 339 | 1353 |  |  |  |  |  |
| 14 | 393 | 1569 |  |  |  |  |  |
| 16 | 513 | 2049 |  |  |  |  |  |
| 17 | 579 |  |  |  |  |  |  |
| 19 | 723 |  |  |  |  |  |  |
| 20 | 801 |  |  |  |  |  |  |
| 22 | 969 |  |  |  |  |  |  |
| 23 | 1053 |  |  |  |  |  |  |
| 25 | 1251 |  |  |  |  |  |  |
| 26 | 1353 |  |  |  |  |  |  |
| 28 | 1569 |  |  |  |  |  |  |
| 29 | 1683 |  |  |  |  |  |  |
| 31 | 1923 |  |  |  |  |  |  |
| 32 | 2049 |  |  |  |  |  |  |

Вот и обещанные все нечётные количество решений до 2050 которые может иметь уравнение X^K=A при достаточном количестве элементов в множестве:

1;3;9;21;25;27;33;45;51;81;

99;129;145;153;189;201;225;243;297;321;

339;351;385;387;393;405;459;465;501;505;

513;579;603;693;721;723;729;801;855;891;

963;969;981;1017;1053;1071;1089;1161;1179;1225;

1233;1251;1281;1345;1353;1395;1503;1539;1569;1575;

1683;1737;1809;1923;2001;2025;2049.

Всего получается до 2050 67 вариантов, а до 2020, 65 варианта.

Из них самые интересное для задания вопроса, это:

1. Какое количество решений которых может иметь X^K=A, максимальный нечётный квадрат среди чисел до 2020, и это 1225=35^2, и такое количество возможно только когда K=35.

2. Ближайший нечётный квадрат к 2020, и это 2025=45^2, и оно возможно только при K=15

3. Перечислить все нечётные до 2020 которые не делятся на 3, и больше 1. И это 25;145;385;505;721;1225;1345;

Естественно все они получены из тех нечётных "K" которые не делятся без остатка на 3.

И на конец некоторые закономерности:

Если количество решений уравнений X^K=A обозначим через S\_AK, а множество простых делителей "K" которые меньше или равно max(Mi) обозначим через Kaj, тогда S\_AK всегда делится без остатка на произведение всех Kaj, а в случае когда все Ki=1 то S\_AK не делится не на одно простое число меньше max(Mi) кроме элементов множества {Kaj}.

То есть, если S\_AK>0 :=>: S\_AK=q\*НОД{K; max(Mi)#}

А если в дополнении к S\_AK>0 ещё и все Ki=1 тогда в дополнении к первому утверждению и второе НОД{S\_AK; min(Mi>=min(p\_K)#}=НОД{K; min(Mi>=min(p\_K)#}

Где “q” натуральное число, знак # праймориал, то есть max(Mi)# это праймориал от max{Mi}, а min(p\_K) это минимальный простой делитель “K”.

Естественно, для любого S\_AK>1 когда хотя бы один Ki>1, количество решений будет чётным.

Когда все Ki=1, K чётное и S\_AK>1 то S\_AK чётное.

Когда все Ki=1, K нечётное и S\_AK>0 то S\_AK нечётное.

И простые числа среди количества решений встречается только дважды, и это “2” и “3”.

Ответ: Да, возможно, и количество основных “конфигурации” для “A” при этом 14 (те которые перечислили выше).

PS: Если этого ряда, нечётного количество решении нету в “Oeis” легко можно вычислить первых 1000 чисел с помощью формулы (Я вычислял в ручную, но если формулу подставить в программу, то получим любое количество сразу) и стоило бы их туда ввести