ММ250

Найти наименьшее возможное количество ребер выпуклого многоугольника, у которого сумма длин ребер равна сумме длин диагоналей.

Ответ: 13

Обозначим через P и S соответственно суммы длин ребер и диагоналей многогранника.

Для $e \leq 12$ тривиально с помощью неравенства треугольника проверяется соотношение $S < P$ (хотя для вытянутого параллелепипеда отношение S/P многогранника можно сколь угодно приблизить к 1).

Рассмотрим $e = 13$. Существует 22 вида (с точностью до топологической эквивалентности) многогранников, имеющих по 13 ребер.

Для 20 из них вновь тривиально проверяется соотношение $S < P$.

На рис. 3 представлен 21-й 13-реберный многогранник, для которого такая проверка наиболее содержательна.

Выпишем очевидные неравенства:

$AB_1 < AB + BB_1$	$AB_1 < AA_1 + A_1B_1$
$BD_1 < BA_1 + A_1D$	$BD_1 < BA_1 + A_1D$
$A_1C < A_1B + BC$	$A_1C < A_1B + BC$
$AC_1 < AD + DC + CC_1$	$AC_1 < AD + DD_1 + D_1C_1$
$B_1D < B_1C_1 + C_1D_1 + D_1D$	$B_1D < B_1C_1 + C_1C + CD$

В левой колонке справа от знака " $<$ " отсутствуют ребра AA_1 и A_1B_1, ребро A_1B встречается дважды, а остальные ребра по одному разу.

В правой колонке справа от знака " $<$ " отсутствуют ребра AB и BB_1, ребро A_1B встречается дважды, а остальные ребра по одному разу.

Суммируя и учитывая очевидное неравенство $2A_1B < AA_1 + A_1B_1 + B_1B + BA$, получим $2S < 2P$.

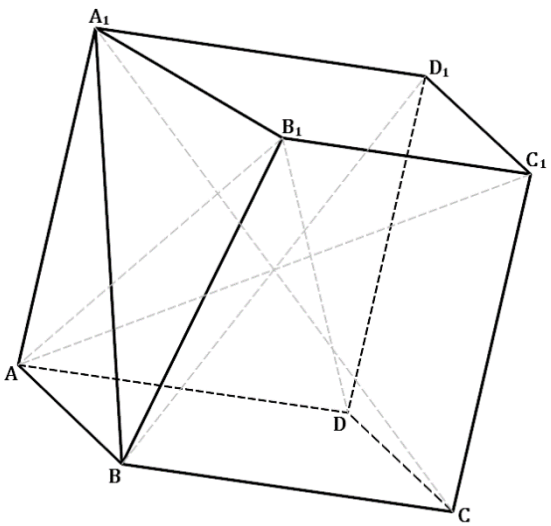

Рис. 1

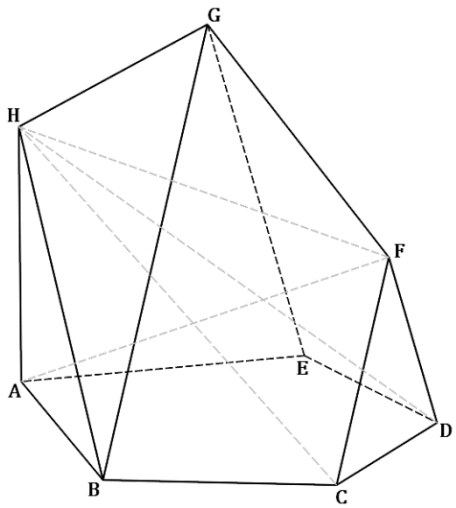

Рис. 2

Остается еще один тип 13-реберных многогранников. Очевидно, что у представителя этого вида многогранников, изображенного на рис. 2 выполняется соотношение $S < T$. Но если растянуть ребра BC, DE и FG, то вместе с ними растянутся и все 4 диагонали многогранника. У многогранника на рис. 3 сумма длин диагоналей уже больше суммы длин ребер.

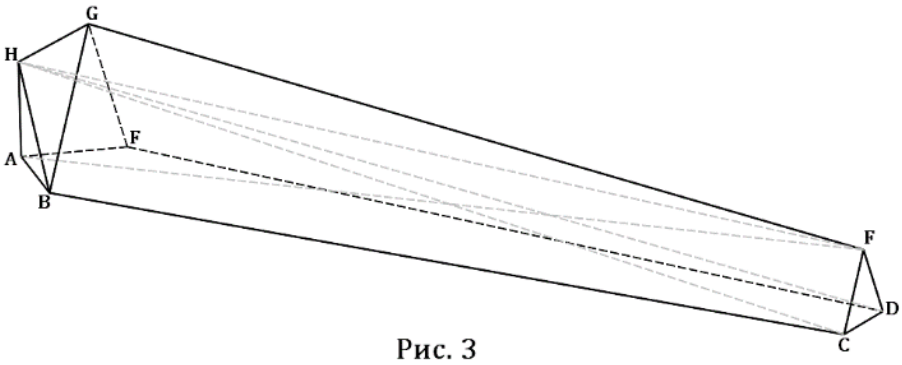

Рис. 3

Очевидно, что в процессе непрерывной деформации многогранника с рис. 2 в многогранник с рис. 3 найдется положение, при котором будет выполняться соотношение $S = T$.