**ММ254** (6 баллов) Решения принимаются до 26.09.2020

**Вася вписал круг в треугольник со сторонами 3, 4, 5. И вписывает новые круги так, что каждый последующий касается двух сторон треугольника и одного из предыдущих кругов. Может ли суммарная площадь кругов превысить 80% от площади треугольника и на каком шаге (круге) может случиться это событие?**

Ответ: событие может произойти на любом круге, начиная с шестого.

Решение: Площади кругов, идущие к любой из вершин треугольника, образуют геометрические прогрессии со знаменателями, равными $\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right)^{2}$, где $x=10, 5, 2$ соответственно для меньшего, среднего и большего (прямого) угла при вершинах треугольника. Приближенные значения знаменателей этих прогрессий соответственно равны $A≈0,269874$, $B≈0,145890$, $C≈0,029437$. Площади кругов (по отношению к площади вписанного круга) будем обозначать соответственно $Ai=A^{i}$, $Bi=B^{i}$, $Ci=C^{i}$. 80 процентов от площади треугольника составляет 1,527887 площадей вписанного треугольника. Суммарная площадь всех кругов превышает это число, поэтому на каком-то шаге событие может произойти.

Наименьшим количество кругов будет, если на каждом шаге Вася вписывает круг максимального из возможных на этом шаге радиуса. Поэтому меньше чем за 6 шагов площадь кругов не достигнет 80 процентов от площади треугольника, а за 6 шагов может превысить 80 процентов, если Вася впишет последовательно круги с площадями, относящихся к площади вписанного круга как:

1 (сам вписанный круг), A1 = 0,269873…, B1 = 0,145890…, A2 = 0,072831…, C1 = 0,0294372…, B2 = 0,021286…

Если в этой последовательности после круга площадью С1 Вася произвольное число других кругов площадью Сi, то площадь всех кругов не достигнет 80 процентов от площади треугольника, пока не будет взят В2. Таким образом, Вася может покрыть более 80 процентов на любом шаге с номером, больше 6.

Покрытие 80 процентов треугольника может и не произойти ни на каком шаге, если Вася, например, последовательно будет вписывать только круги площадями 1, С1, С2, С3, С4