**ММ258** (7 баллов) Решения принимаются до 24.10.2020

**Сколько элементов содержит множество сумм квадратов цифр квадратов чисел, в десятичной записи которых присутствуют по одному разу ровно три ненулевых цифры: 1, 4, 9? (Нулей может быть сколько угодно).**

Ответ: множество содержит 25 чисел: 13, 137, 139, 224, 86, 234, 19, 113, 228, 216, 200, 305, 240, 303, 115, 301, 167, 315, 289, 287, 285, 194, 297, 299, 208

Решение: Пусть – два произвольных натуральных числа, тогда рассматриваются квадраты чисел вида Их квадраты имеют вид:

. (1)

Поскольку , то все множители перед степенями десятки не более чем двузначны. Таким образом, ненулевыми цифрами квадратов рассматриваемых чисел могут быть только цифры в разрядах либо в разрядах, на единицу больших, чем перечисленные. Если какое-то число из этого набора из шести разрядов отличается от всех остальных чисел на 2 и более, то соответствующий одно- или двузначный множитель из выражения (1) входит в запись числа в виде отдельного двузначного числа.

Числа , кроме пары чисел , расположены в строго убывающем порядке, разность между соседними двумя сравнимыми числами либо , либо . Поэтому отличаться друг от друга меньше, чем на 2 могут либо соседние между собой сравнимые числа, либо числа между собой. Поэтому для наборов цифр квадратов чисел, а значит и для суммы квадратов этих цифр, существенно различными могут оказаться только следующие случаи:

Для каждого из этих 9 вариантов есть по 6 способов отождествления элементов во множествах . Переберем все 54 варианта и вычислим в каждом из этих вариантов сумму квадратов цифр – результаты привожу в таблице. Для многих случаев наборы цифр в квадратах, либо просто сумма квадратов этих цифр оказались одинаковыми, такие случаи выделены одинаковым цветом. Всего нашлось 25 различных квадратов сумм цифр (последний столбец таблицы)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 149 | 22201 | 2 | 2 | 2 | 1 |  |  |  |  |  |  |  | 13 |
| 419 | 175561 | 1 | 7 | 5 | 5 | 6 | 1 |  |  |  |  |  | 137 |
| 194 | 37636 | 3 | 7 | 6 | 3 | 6 |  |  |  |  |  |  | 139 |
| 914 | 835396 | 8 | 3 | 5 | 3 | 9 | 6 |  |  |  |  |  | 224 |
| 491 | 241081 | 2 | 4 | 1 | 8 | 1 |  |  |  |  |  |  | 86 |
| 941 | 885481 | 8 | 8 | 5 | 4 | 8 | 1 |  |  |  |  |  | 234 |
| 1049 | 1100401 | 1 | 1 | 4 | 1 |  |  |  |  |  |  |  | 19 |
| 4019 | 16152361 | 1 | 6 | 1 | 5 | 2 | 3 | 6 | 1 |  |  |  | 113 |
| 1094 | 1196836 | 1 | 1 | 9 | 6 | 8 | 3 | 6 |  |  |  |  | 228 |
| 9014 | 81252196 | 8 | 1 | 2 | 5 | 2 | 1 | 9 | 6 |  |  |  | 216 |
| 4091 | 16736281 | 1 | 6 | 7 | 3 | 6 | 2 | 8 | 1 |  |  |  | 200 |
| 9041 | 81739681 | 8 | 1 | 7 | 3 | 9 | 6 | 8 | 1 |  |  |  | 305 |
| 1409 | 1985281 | 1 | 9 | 8 | 5 | 2 | 8 | 1 |  |  |  |  | 240 |
| 4109 | 16883881 | 1 | 6 | 8 | 8 | 3 | 8 | 8 | 1 |  |  |  | 303 |
| 1904 | 3625216 | 3 | 6 | 2 | 5 | 2 | 1 | 6 |  |  |  |  | 115 |
| 9104 | 82882816 | 8 | 2 | 8 | 8 | 2 | 8 | 1 | 6 |  |  |  | 301 |
| 4901 | 24019801 | 2 | 4 | 1 | 9 | 8 | 1 |  |  |  |  |  | 167 |
| 9401 | 88378801 | 8 | 8 | 3 | 7 | 8 | 8 | 1 |  |  |  |  | 315 |
| 14009 | 196252081 | 1 | 9 | 6 | 2 | 5 | 2 | 8 | 1 |  |  |  | 216 |
| 41009 | 1681738081 | 1 | 6 | 8 | 1 | 7 | 3 | 8 | 8 | 1 |  |  | 289 |
| 19004 | 361152016 | 3 | 6 | 1 | 1 | 5 | 2 | 1 | 6 |  |  |  | 113 |
| 91004 | 8281728016 | 8 | 2 | 8 | 1 | 7 | 2 | 8 | 1 | 6 |  |  | 287 |
| 49001 | 2401098001 | 2 | 4 | 1 | 9 | 8 | 1 |  |  |  |  |  | 167 |
| 94001 | 8836188001 | 8 | 8 | 3 | 6 | 1 | 8 | 8 | 1 |  |  |  | 303 |
| 10049 | 100982401 | 1 | 9 | 8 | 2 | 4 | 1 |  |  |  |  |  | 167 |
| 40019 | 1601520361 | 1 | 6 | 1 | 5 | 2 | 3 | 6 | 1 |  |  |  | 113 |
| 10094 | 101888836 | 1 | 1 | 8 | 8 | 8 | 8 | 3 | 6 |  |  |  | 303 |
| 90014 | 8102520196 | 8 | 1 | 2 | 5 | 2 | 1 | 9 | 6 |  |  |  | 216 |
| 40091 | 1607288281 | 1 | 6 | 7 | 2 | 8 | 8 | 2 | 8 | 1 |  |  | 287 |
| 90041 | 8107381681 | 8 | 1 | 7 | 3 | 8 | 1 | 6 | 8 | 1 |  |  | 289 |
| 1000409 | 1000818167281 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 | 6 | 7 | 2 | 8 | 1 |  | 285 |
| 4000109 | 16000872011881 | 1 | 6 | 8 | 7 | 2 | 1 | 1 | 8 | 8 | 1 |  | 285 |
| 1000904 | 1001808817216 | 1 | 1 | 8 | 8 | 8 | 1 | 7 | 2 | 1 | 6 |  | 285 |
| 9000104 | 81001872010816 | 8 | 1 | 1 | 8 | 7 | 2 | 1 | 8 | 1 | 6 |  | 285 |
| 4000901 | 16007208811801 | 1 | 6 | 7 | 2 | 8 | 8 | 1 | 1 | 8 | 1 |  | 285 |
| 9000401 | 81007218160801 | 8 | 1 | 7 | 2 | 1 | 8 | 1 | 6 | 8 | 1 |  | 285 |
| 100409 | 10081967281 | 1 | 8 | 1 | 9 | 6 | 7 | 2 | 8 | 1 |  |  | 301 |
| 400109 | 160087211881 | 1 | 6 | 8 | 7 | 2 | 1 | 1 | 8 | 8 | 1 |  | 285 |
| 100904 | 10181617216 | 1 | 1 | 8 | 1 | 6 | 1 | 7 | 2 | 1 | 6 |  | 194 |
| 900104 | 810187210816 | 8 | 1 | 1 | 8 | 7 | 2 | 1 | 8 | 1 | 6 |  | 285 |
| 400901 | 160721611801 | 1 | 6 | 7 | 2 | 1 | 6 | 1 | 1 | 8 | 1 |  | 194 |
| 900401 | 810721960801 | 8 | 1 | 7 | 2 | 1 | 9 | 6 | 8 | 1 |  |  | 301 |
| 104009 | 10817872081 | 1 | 8 | 1 | 7 | 8 | 7 | 2 | 8 | 1 |  |  | 297 |
| 401009 | 160808218081 | 1 | 6 | 8 | 8 | 2 | 1 | 8 | 8 | 1 |  |  | 299 |
| 109004 | 11881872016 | 1 | 1 | 8 | 8 | 1 | 8 | 7 | 2 | 1 | 6 |  | 285 |
| 901004 | 811808208016 | 8 | 1 | 1 | 8 | 8 | 2 | 8 | 1 | 6 |  |  | 299 |
| 409001 | 167281818001 | 1 | 6 | 7 | 2 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 |  | 285 |
| 904001 | 817217808001 | 8 | 1 | 7 | 2 | 1 | 7 | 8 | 8 | 1 |  |  | 297 |
| 10409 | 108347281 | 1 | 8 | 3 | 4 | 7 | 2 | 8 | 1 |  |  |  | 208 |
| 40109 | 1608731881 | 1 | 6 | 8 | 7 | 3 | 1 | 8 | 8 | 1 |  |  | 289 |
| 10904 | 118897216 | 1 | 1 | 8 | 8 | 9 | 7 | 2 | 1 | 6 |  |  | 301 |
| 90104 | 8118730816 | 8 | 1 | 1 | 8 | 7 | 3 | 8 | 1 | 6 |  |  | 289 |
| 40901 | 1672891801 | 1 | 6 | 7 | 2 | 8 | 9 | 1 | 8 | 1 |  |  | 301 |
| 90401 | 8172340801 | 8 | 1 | 7 | 2 | 3 | 4 | 8 | 1 |  |  |  | 208 |