НА СКОЛЬКО ТЕТРАЭДРОВ МОЖНО РАЗРЕЗАТЬ КУБ?

Странный вопрос – подумает читатель. После недолгих раздумий легко понять, что на 5 тетраэдров разрезать куб можно (под «тетраэдром» мы будем понимать произвольную треугольную пирамиду), а менее чем на 5 – не получиться. Ну а далее – все очевидно: поскольку любой тетраэдр можно разрезать на два, достижимо любое количество тетраэдров, начиная с 5.

Это верно, но мы будем рассматривать лишь специальные разрезания, являющиеся естественным обобщением триангуляции многоугольника непересекающимися диагоналями. Во-первых, будут разрешены лишь сечения куба и возникающих многогранников плоскостью, проходящей, не менее чем через три вершины многогранника, не лежащие в одной грани. Во-вторых, каждый многогранник, возникший после таких разрезаний, мы будем рассматривать отдельно. Ясно, что тетраэдр разрезать по этим правилам нельзя. Поэтому, если после нескольких разрезаний не останется многогранников, отличных от тетраэдров, процесс остановится.

При таких правилах ответ на поставленный в заголовке вопрос уже не столь очевиден. Однако, обо всем по порядку. Сначала покажем, что пять тетраэдров действительно минимальное достижимое количество.

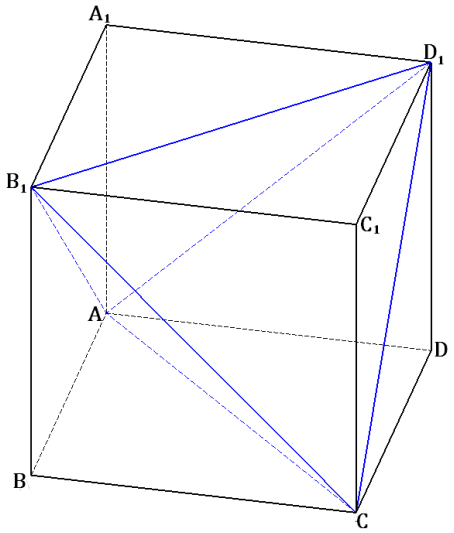

Рис. 1

Рассмотрим две противоположные грани куба, например, верхнюю и нижнюю. Поскольку все грани тетраэдра – треугольники, исходные квадратные грани куба должны быть разрезаны, как минимум на два треугольника каждая. Даже если сечение, содержащее одну треугольную грань в нижнем основании «дотянется» до верхнего основания, объем отсекаемого тетраэдра составит не более $\frac{1}{6}$ от объема исходного куба. Две треугольные грани из верхнего и нижнего оснований не могут одновременно входить в один тетраэдр. Поэтому четыре тетраэдра, имеющие грани в верхнем (нижнем) основании куба не могут заполнить весь исходный куб. С другой стороны, отсекая от куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 1) тетраэдры $AA_1B_1D_1$, $CB_1C_1D_1$, $ABCB_1$ и $ACDD_1$, получим разбиение исходного куба на 5 тетраэдров (пятым будет ACB_1D_1).

Если же сначала разрезать куб сечением, проходящим через параллельные диагонали противоположных граней (например AC и A_1C_1), получим две треугольные призмы, каждая из которых, при нашем способе разрезания может быть будет рассечена ровно на три тетраэдра (на рис. 2 указано рассечение одной из них). Таким

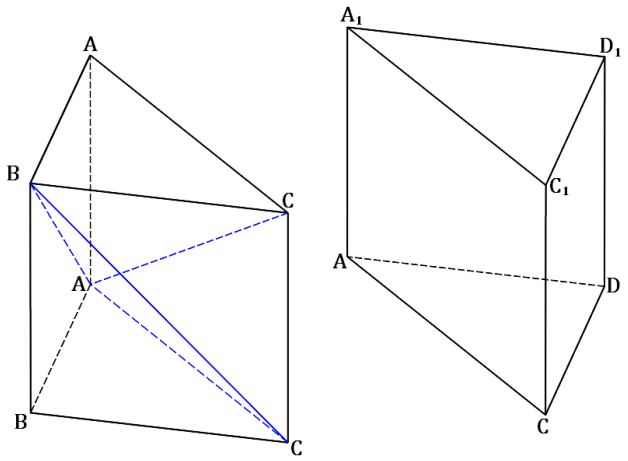

Рис. 2

образом, из исходного куба получится уже не 5, а 6 тетраэдров.

Куб обладает массой симметрий, поэтому существует всего лишь два принципиально различных способа выбрать три вершины, не лежащие в одной грани: взять три вершины, смежные одной; взять три вершины, две из которых будут принадлежать какой-то диагонали куба. Последовательно используя сечения первого вида, получим на выходе 5 тетраэдров. Если же стартовать с сечения второго вида, получим 6 тетраэдров.

В первый момент автору показалось, что числами 5 и 6 исчерпываются все возможные количества тетраэдров, на которые можно разрезать куб нашим способом. Второй способ действительно не может привести к другому (отличному от 6) количеству тетраэдров. Но с первым дело обстоит хитрее. Допустим, мы уже отсекли от куба тетраэдр с вершиной C_1. Если мы продолжим отсекать тетраэдры с вершинами A_1, B и D, то мы придем к уже описанному рассечению на 5 тетраэдров. Но у нас есть еще одна возможность (доставшаяся нам в наследство от второго способа) – провести сечение через вершины C, A и A_1. В этом случае, в дополнение к отрезанному ранее тетраэдру, мы получим два равных (но по-разному ориентированных) многогранника (рис. 3). Каждый из них будет иметь по 6 вершин, 6 граней и 10 ребер. Называется такой многогранник – тетрагональный антиклин.

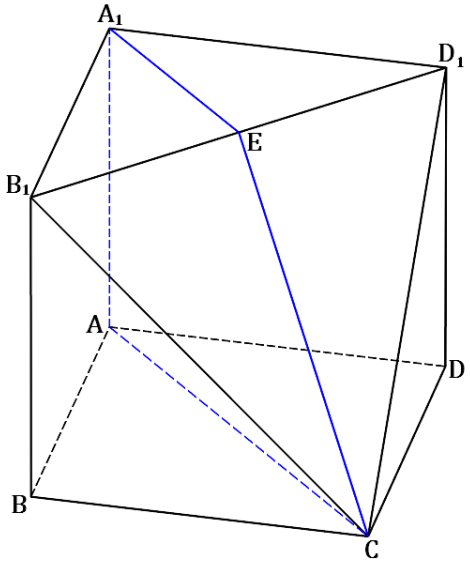

Рис. 3

Посмотрим, на сколько тетраэдров можно разрезать, скажем, левый тетрагональный антиклин (ясно, что правого множество ответов будет таким же).

Дабы ничего не пропустить займемся полным перебором всех возможных сечений тетрагонального анкиклина $ABCA_1B_1E$. Всего можно выбрать $\binom{6}{3} = 20$ троек вершин. Но 12 из них (по четыре тройки на каждую из двух четырехугольных граней и по одной троке на каждую из четырех треугольных граней) не приведут к требуемым сечениям. Таким образом нам остается рассмотреть всего 8 случаев, которые естественным образом разобьются на 4 пары.

Сечение AB_1C (рис. 4) разбивает антиклин на тетраэдр $ABCB_1$ и четырехугольную пирамиду B_1ACEA_1, которая, в свою очередь, очевидно делится на два тетраэдра. Это дает 3 тетраэдра. С учетом ранее отрезанного тетраэдра $C_1B_1CD_1$ получаем $1 + 3 + 3 = 7$ тетраэдров. Так что, числами 5 и 6 все возможные количества тетраэдров не исчерпываются. Сечение A_1B_1C также приводит к разбиению исходного тетрагонального антиклина на треугольную и четырехугольную пирамиду и, конечном итоге на 3 тетраэдра.

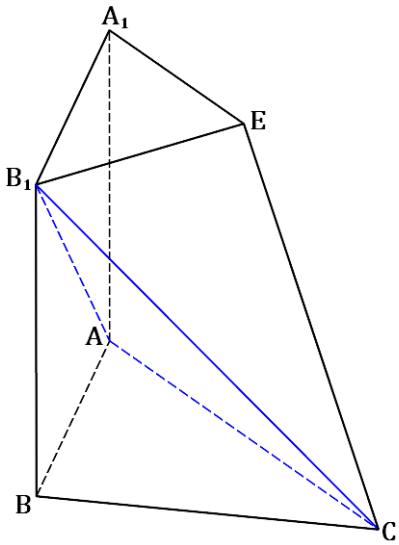

Рис. 4

Сечение AB_1E (рис. 5) разбивает исходный антиклин на тетраэдр AA_1B_1E и треугольную бипирамиду $BEAB_1C$. Треугольная бипирамида, очевидно, может быть разрезана на два тетраэдра, если сечение совпадает с общим основанием составляющих ее тетраэдров (в нашем случае это AB_1C). Однако, если провести сечение через вершины бипирамиды и одну из вершин общего основания (например, B_1), бипирамида распадется на две четырехугольные пирамиды (дополнительная вершина образуется на ребре AC). Следовательно, в этом случае тетрагональный антиклин разбивается на 3 или на 5 тетраэдров. Учитывая, второй антиклин и отрезанный ранее тетраэдр, придем к разбиению куба на 7, 9 или 11 тетраэдров.

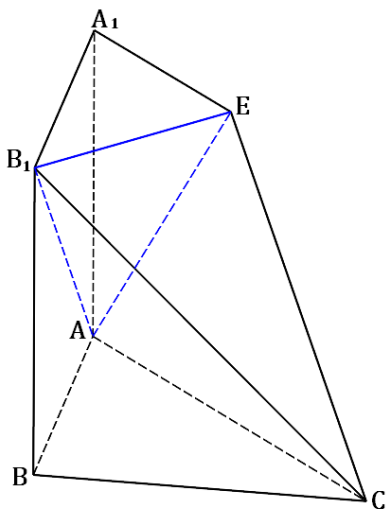

Рис. 5

Аналогичное разбиение тетрагонального антиклина получается, если стартовать с сечения A_1BC.

Третий возможный вариант разрезания тетрагонального антиклина – сечение BB_1E (рис. 6). Полученная треугольная призма $ABFA_1B_1E$ разрезается далее на 3 тетраэдра, а четырехугольная пирамида CBB_1EF – на 2. В результате получается 5 тетраэдров, что не приводит к получению новых значений.

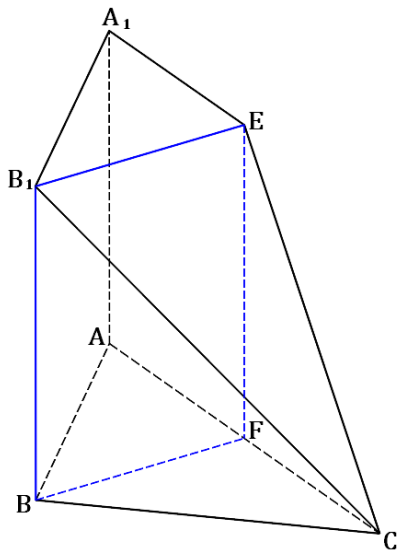

Рис. 6

К аналогичным результатам приводит сечение исходного антиклина, проходящее через вершины B, C и E. Правда, в этом случае вместо призмы возникает усеченная треугольная пирамида. Но, она точно также, как и призма, разрезается по нашим правилам ровно на 3 тетраэдра.

Осталось рассмотреть две тройки вершин, приводящие к сечениям: A_1, B, E и A, B, E.

Первое сечение представлено на рисунке 7. На нем легко различима четырехугольная пирамида B_1A_1BGE. Менее очевидно, что представляет второй многогранник. Но приглядевшись мы поймем, что это … тетрагональный антиклин. К аналогичному разбиению на четырехугольную пирамиду и тетрагональный антиклин приводит и сечение, проходящее через вершины A, B, E.

Остается заметить, что рассмотренные нами возможные сечения характерны для любого тетрагонального анктиклина, а не только для антиклина специального вида (полученного из куба). Так, наиболее интересное рассечение на четырехугольную пирамиду и новый тетрагональный антиклин получается всякий раз, когда сечения проходит через три вершины степени 3, две из которых лежат на диагонали четырехугольной грани. В частности, к разбиению антиклина AA_1BCEG (рис. 7) на четырехугольную пирамиду и новый антиклин

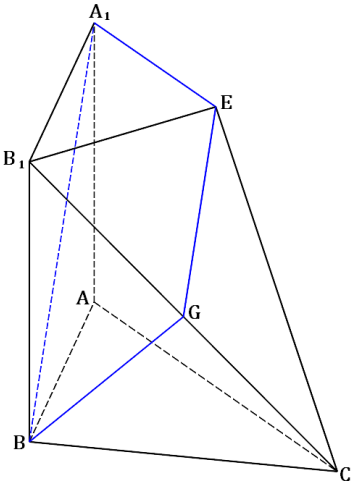

Рис. 7

приведут сечения, проходящие через тройки вершин третьей степени A, E, G и A, A_1, G (остальные две тройки не приводят к сечениям).

Таким образом, тетрагональный антиклин можно разрезать нашим способом на любое нечетное количество тетраэдров, начиная с 3. Следовательно, мы уже умеем разрезать куб на 6 тетраэдров и любое нечетное количество тетраэдров начиная с 5.

Но все ли возможности исчерпаны? Многогранник на рисунке 3 имеет 7 вершин. Выбрать 3 вершины можно 35 способами. Не исключено, что некоторые из них приведут в итоге к другим количествам тетраэдров. Проверим, так ли это.

16 троек (по одной для четырех треугольных троек и по четыре для трех четырехугольных граней) не приведут к сечениям.

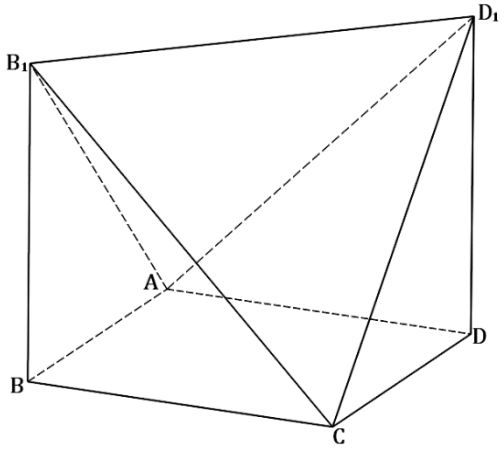

Рис. 8

Многогранник на рисунке 3 содержит три пары противоположных ребер исходного куба ($BB_1, DD_1; BC, A_1D_1;\ CD, A_1B_1$). Поэтому еще 12 троек приведут к сечениям, проходящим через 4 вершины многогранника. А каждое из таких сечений, в конечном итоге, приводит к разбиению исходного куба на 6 тетраэдров.

Сечения, проходящие через тройки вершин A, B, D_1 и A, D, B_1 приводят к рассмотренному выше разбиению на два тетрагональных антиклина.

Рассмотрим сечение AB_1D_1 (сечения ACB_1 и ACD_1 приводят к аналогичным разбиениям). В результате многогранник с рис. 3 разобьется на тетраэдр и многогранник, представленный на рис. 8. Для этого многогранника возможны сечения трех типов.

Сечение BDD_1B_1 приводит к уже известному нам разрезанию исходного куба на 6 тетраэдров.

Сечение ACB_1 (ACD_1) дает тетраэдр и треугольную бипирамиду, которую, как мы знаем, можно разрезать на 2 или 4 тетраэдра. Для исходного куба это дает уже известные 5 или 7 тетраэдров.

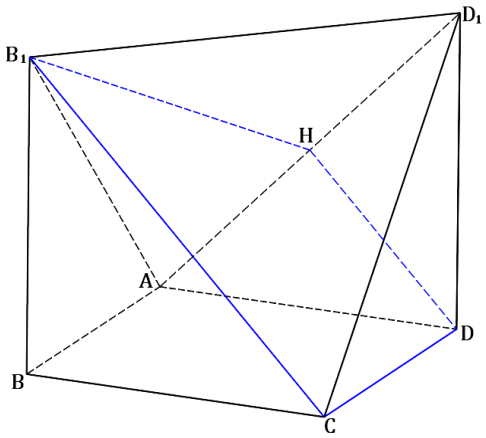

Рис. 9

Наиболее содержателен случай сечения, проходящего через вершины C, D, B_1 (рис. 9) и аналогичные ему. Один из двух образовавшихся многогранников – четырехугольная пирамида D_1CDHB_1. Другой – тетрагональный антиклин $ADHBCB_1$. С учетом двух ранее отрезанных тетраэдров получаем, что сечение $CDHB_1$ приводит к разрезанию исходного куба на любое нечетное количество тетраэдров, начиная с 7.

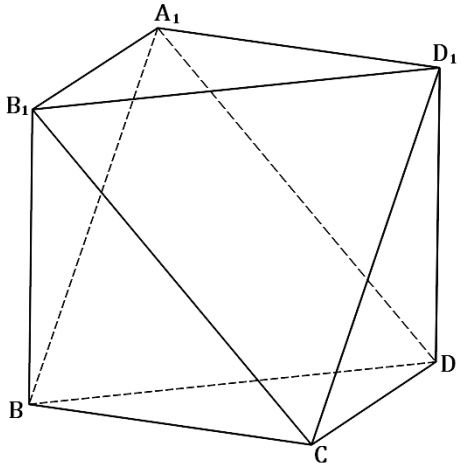

Рис. 10

Нам осталось рассмотреть последнее сечение многогранника, изображенного на рис. 3 - BDA_1. В результате получим тетраэдр и многогранник, изображенный на рис. 10. Он

представляет собой треугольную антипризму. Основаниями антипризмы служат правильные треугольники BDA_1 и CB_1D_1, а боковыми гранями – 6 равнобедренных треугольников. Эту антипризму можно рассматривать и как октаэдр с оговоркой, что под «октаэдром» чаще всего понимают правильный октаэдр, на многогранник на рис. 10 правильным, конечно, не является. Но для нас важно другое: так же, как и в случае правильного октаэдра, любое сечение нашего многогранника, содержащее, по крайней мере, три его вершины, содержит и четвертую, разбивая его на две четырехугольные пирамиды. С учетом двух отсеченных ранее тетраэдров это дает рассечение исходного куба на 6 тетраэдров.

Окончательно получаем: действуя описанным выше способом куб можно разрезать на 6 тетраэдров, а также на любое нечетное количество тетраэдров, начиная с 5.

Конечно, на кубе свет клином (и антиклином) не сошелся. Поставленный в заголовке вопрос допускает естественное обобщение.

Пусть P – некоторый многогранник. Обозначим через $S(P)$ множество количеств тетраэдров, на которые может быть разрезан многогранник P, при условии, что:

- разрешены лишь сечения исходного и возникающих многогранников, проходящие через, по крайней мере, 3 вершины;
- возникающие в результате сечений многогранники рассматриваются по отдельности.

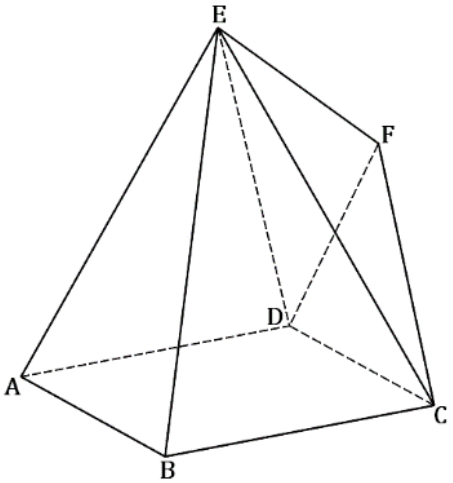

Рис. 11

Приведем несколько результатов для выпуклых многогранников.

Класс многогранников, для которых $S(P)$ одноэлементно весьма узок. В него входят только пирамиды, треугольные призмы (треугольные усеченные пирамиды), и четырехугольные бипирамиды специального вида (после удаления любых двух несмежных вершин оставшиеся четыре лежат в одной плоскости). Для треугольных бипирамид и только для них $S(P)$ состоит ровно из двух чисел (2 и 4).

Гораздо шире класс многогранников, для которых $S(P)$. Из приведенных выше рассуждений видно, что в этот класс попадают и куб (параллелепипед, усеченная четырехугольная пирамида), и тетрагональный антиклин, и многогранники, изображенные на рисунках 3 и 8. Однако, для всех этих многогранников дополнение $S(P)$ до множества натуральных чисел тоже бесконечно. Разумеется, так бывает не всегда. Например, многогранник на рис. 11 можно разрезать нашим способом на любое количество тетраэдров, отличное от 1, 2, 4 и 6.

Автору неизвестно, существуют ли многогранники, для которых $S(P) = \emptyset$, то есть такие, что их нельзя разрезать указанным способом на конечное число тетраэдров.